Korden

Fire fokus for god matematikkundervising

Holmboeprisen vert kvart år delt ut til lærarar som har utmerka seg i arbeid med matematikkfaget i grunnskule eller vidaregåande skule. I dette nummeret har me med tekstar frå vinnaren, Hanan Mohamed Abdelrahaman, samt tre av dei seks som fekk heidersomtale: Anne-Marit Selstø Rathke, Renate Jensen og Lura skule representert ved Monica Gilje Rennemo, Laila Karin Olsen Meberg og Wenke Leonora Søvik. Prisen gir eit positivt fokus på matematikk i skulen og er ein måte å verdsetja god matematikkundervising på. Så kva legg desse dyktige lærarane vekt på i undervisinga? Ein kunne tru at det er ulike ting. Men trass i at dei kjem frå ulike delar av landet eller soknar til bestemte tradisjonar som til dømes russisk matematikk, er det langt fleire fellestrekk enn ulikskapar. Eg har gått gjennom tekstane og identifisert fire fokus som alle i større eller mindre grad legg vekt på:

Dei ser på *læring som forståing*. Læring er meir enn pugg og mekanisk rekning, det handlar om å forstå omgrep og kopla saman matematiske tema til heilskapleg forståing. Elevar som utforskar og resonnerer, som er kreative, kritiske og analytiske, vert lyfta fram som viktige mål. Alle er ambisiøse på elevar sine vegne, det skal vera eit læringstrykk.

Elevar må *oppleva matematikk som relevant*. Dei skal oppleva at dei har bruk for matematikk, både no og i framtidige yrker. For å oppnå dette trekkjer forfattarane fram det å inkludera praktiske og konkrete utfordringar som elevar ynskjer å rekna på – elevar må erfara faget sin nytteverdi. Artiklane om matematikk i kystfiske og i fysioterapi er konkrete døme på matematikk i bruk.

Lærar må legga til rette for *matematikkfaglege samtalar*. Det er eit mål at elevar uttrykkjer seg munnleg i matematikk, at dei utviklar matematisk språk og omgrep gjennom aktivt å delta i læringssamtalar. For å få til matematiske samtalar med høg kvalitet vert det å stilla gode spørsmål lagt vekt på, og ein må vera medviten at aukande språkleg mangfald både stiller nye krav og gir nye mogelegheiter.

Alle trekkjer fram *motivasjon og matematikkglede*. Det er eit viktig fokus at elevar skal verta glade i å arbeida med matematikk og utvikla ei positiv innstilling til faget. Å legga til rette for at elevar vert engasjerte, motiverte og har lyst til å læra matematikk kan alle som er opptekne av matematikkundervising ta med seg.

Tangenten støttar desse fire fokusa, og inspirasjon til å omsetja dei til praksis kan hentast frå Erfjord og Hundeland sin tekst om lærarsamarbeid.

Owren

Holmboeprisen 2017

Den 22. mai 2017 ble Holmboeprisen delt ut for trettende gang. Seremonien foregikk som vanlig i Oslo katedralskoles aula, og prisen ble overrakt av daværende kunnskapsminister Torbjørn Røe Isaksen. Det var økning i antallet nominerte til Holmboeprisen sammenlignet med tidligere år. Det var også uvanlig mange gode kandidater til å vinne prisen, og det ble gitt hele seks hedersomtaler. Årets vinner ble Hanan Abdelrahman. Hun underviser ved Lofsrud skole i Oslo.

De seks som fikk hedersomtale, var tre lærere ved Lura skole i Sandnes kommune: Monica Gilje Rennemo, Laila Karin Olsen Meberg og Wenke Leonora Søvik, det var Skage Hansen ved Engebråten skole i Oslo, Renate Jensen ved Nattland skole i Bergen, Anne-Marit Selstø Rathke ved Rothaugen skole i Bergen, Oddrun Irene Page Aarstad ved Godalen videregående skole i Stavanger og Tor Espen Kristensen ved Stord vidaregåande skule.

Abdelrahman viser et brennende engasjement for sin undervisningsgjerning, og hun har en tydelig filosofi som hun bygger sitt virke på. En av grunnsteinene i hennes filosofi er at alle kan mestre faget matematikk. Hun stiller dermed krav til elevene, utfordrer dem og forventer at de gjør en innsats. Hun er spesielt dyktig til å sette seg inn i hvordan elevene tenker, og hun gir dem hjelp på deres egne premisser med utgangspunkt i den enkeltes forutsetninger. På denne måten klarer hun å anspore elevene til hardt arbeid, som igjen i de fleste tilfeller gir mestringsfølelse. Hun er svært dyktig til å hente problemstillinger som hver enkelt elev har et forhold til, små oppgaver hentet fra hverdagen eller fra saker av betydning som skjer i verden rundt oss. I alle slike situasjoner fins det spørsmål som kan belyses ved å sette opp et matematikkproblem, og det behøver ikke nødvendigvis å være avansert eller vanskelig matematikk som benyttes. Hanan supplerer lærebøker og tradisjonelle oppgaver med egne videoer, matematiske spill og matematikkleker.

Hanan Abdelrahman har en vitenskapelig tilnærming til sin matematikkundervisning, og hennes arbeid er understøttet av en solid faglig innsikt. Hun har en mastergrad i grunnskoledidaktikk med fordypning i matematikk og er i gang med videre matematikkstudier. Hun har mange års erfaring som lærer og jobber målrettet med tilpasset opplæring for å heve elevenes resultater og karaktersnitt i matematikk. På Lofsrud skole er det faglig og språklig mangfold. Hanan arbeider bevisst med å hjelpe alle elevene, uansett bakgrunn, til å lykkes på sitt nivå og utvikle seg videre. Hun er en glimrende

(fortsettes side 14)

Brynjulf Owren
NTNU, leder i Norsk matematikkråd
brynjulf.owren@ntnu.no

Abdelrahman

Undervisningens fokus

I matematikkundervisningen min brenner jeg for at elevene mine skal få rik matematisk kompetanse hvor matematikkfaget kan hjelpe dem med å være tenkende, kreative, kritiske, analytiske og gode problemløsere. Jeg er ambisiøs på vegne av elevene mine og ønsker at de skal kunne mer enn å regne matematikkoppgaver mekanisk fordi matematikk som fag handler om så mye mer. Elevene skal forstå det de driver med, og ikke bare pugge ferdige oppskrifter og formler uten mening. Jeg er ikke minst opptatt av at hver og en av dem skal komme ut av matematikktimen med en følelse av mestring og motivasjon for faget. Vanskelig kombinasjon, sa du?

Kanskje er det lettere å få innblikk via eksempler. I denne artikkelen vil jeg ta dere med inn i det som kunne vært en av mine typiske matematikktimer.

Bakgrunnsinformasjon

Jeg jobber på en ungdomsskole skole som ligger i Oslo og er lærer for en matematikklasse på 20–24 elever. Det er en skole med stort språklig og kulturelt mangfold. Enkeltelever kan ha erfaring med skolegang som ligger langt fra eller langt over den vi kjenner fra norsk skole.

På bakgrunn av dette mangfoldet må jeg som matematikklærer arbeide for å gjøre matematikk til noe som kan være relevant, praktisk og konkret for alle elevene. Jeg har måttet begynne å tenke nytt, variere undervisningen min og bli flinkere til å se på hva som er vanskelig i matematikk fra elevenes perspektiv.

Jeg satte meg noen konkrete mål:

1) Jobbe med holdninger og motivasjon rundt matematikkfaget
2) Ha undervisningsformer i matematikktimer som engasjerer og aktiviserer alle elevene
3) Visualisere mer og bruke flere praktiske eksempler

I beskrivelsen av en typisk matematikktime gjør jeg greie for hvordan jeg arbeider med disse målsettingene.

Startoppgave

Vi starter alltid med en oppvarmingsoppgave, «teaser», noe som får elevene til kvikne til, og som får dem til å komme i matematikkmodus og huske hvor gøy arbeid med tall kan være. Her jobbes det med det første målet i listen min: holdninger og motivasjon rundt matematikkfaget.

Hanan Mohamed Abdelrahman
Lofsrud skole
hanan0407@osloskolen.no

Det kan være en oppgave som handler om hoderegning, en grublis, noe vi fant i avisen som handler om en morsom tallsammenheng, eller kanskje en matematisk feil på en plakat. Et eksempel på en slik oppvarmingsoppgave har jeg tatt fra matematikk-infotainment-TV-serien «Siffer», som gikk på NRK1 høsten 2011:

> En pølse med brød koster 25 kroner. Pølsa koster 20 kroner mer enn brødet. Hva koster brødet?

Denne oppgaven åpner for differensiering og morsomme diskusjoner og kan løses både med og uten likninger og algebra. Med en overflatisk tilnærming er det lett for mange elever å tro at pølsa koster 20 kroner og brødet 5 kroner. Diskusjonen om hvorfor løsningsforslaget 20 kroner og pølsa og 5 kroner for brødet ikke er riktig, og hvordan vi fort kan teste at dette løsningsforslaget ikke holder mål, engasjerer elevene. Hvis de subtraherer 5 kroner fra 20 kroner, finner de fort at tallet 20 er kun 15 mer enn tallet 5. Dette i seg selv er en stor oppdagelse for mange elever. Noen elever kan prøve og feile med flere verdier til de får differansen 20 mellom prisen til pølsa og prisen til brødet. Prøve-og-feile-metoden ser jeg fungerer fint for å aktivisere «sunn fornuft» og intuisjonsevnene hos alle elevene. Ikke minst er det nyttig å diskutere ulike måter for hvordan man kan sjekke og kontrollere om svaret er riktig.

Noen elever tror at «20 mer» er det samme som 20 ganget med den aktuelle verdien. Her dukker det opp en gyllen mulighet for å diskutere begrepet «mer» og hvorfor den er relatert til addisjon og ikke til multiplikasjon. De fleste elevene har erfaringer med å kjøpe pølse i brød i kiosken, så kanskje det er aktuell praktisk matematikk å tenke på neste gang de kjøper pølsa si?

En annen tilnærming til oppgaven kan være å sette opp likningssett og deretter bruke innsettingsmetoden. Kanskje noen oppdager at det går fortere enn å prøve og feile?

Mål for timen og åpne oppgaver

Videre skrives målene for timen på tavlen slik at elevene er forberedt på læringsmålet som skal nås i løpet av matematikkøkten.

Vi lager deretter et tankekart på tavlen for å kartlegge forkunnskaper om tema og aktivisere eksisterende kunnskaper slik at disse kan brukes for å støtte tilegning av ny kunnskap.

Elevene deles i grupper. De får en stor, åpen oppgave som begynner enkelt, slik at elever uansett nivå får mulighet til å bidra og være med. De får tid til å tenke, diskutere, spørre, undersøke, tegne og fordøye oppgaven.

Jeg arbeider aktivt med å velge oppgavetype som fungerer i hel klasse, oppgaver som åpner for godt samarbeid elevene imellom, som åpner for matematiske diskusjoner, ulike tenkemåter og ulike representasjonsformer, og ikke minst som åpner for differensiering og muntlig trening.

For eksempel har en oppgave hentet fra felles heldagsprøve i matematikk i Oslo for 10. trinn i mars 2017 fungert godt i klassen min (figur 1).

Tanken bak å tegne epler som en firkant og pærer som en sirkel er å gjøre det lettere for elever som trenger konkretisering, å tegne eller bruke konkreter som for eksempel legobrikker eller ludobrikker. Elevene starter gjerne med å tegne eller bruke konkretene de blir tilbudt. For eksempel kan antall epler tegnes som kvadrater og antall pærer som rektangler (figur 2).

Deretter lager elevene gjerne en tabell som hjelper dem å se et mønster i sammenheng med figurnummer. De ser i tabellen hvordan antall epletrær og pæretrær vokser i sammenheng med figurnummeret. Plutselig ser de svaret til deloppgave c: I figur nummer 8 vil det være dobbelt så mange epletrær som pæretrær!

De erfarer også at etter hvert som figuren vokser, er det mye lettere å regne ut svar i en tabell, og at det blir tungvint å tegne eller bruke konkreter etter figur nummer 5.

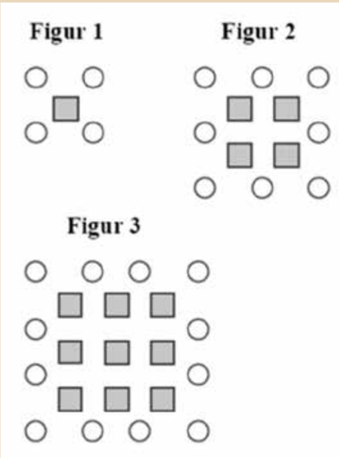
Denne oppgaven kan illustreres geometrisk og grafisk og passer fint for elever som er glad i å bruke digitale hjelpemidler. Hvis en faktoriserer

I en frukthage har man plantet epletrær (□) med pæretrær (○) rundt.

a) Hvor mange epletrær og pæretrær er det i figur 5?

b) Hvor mange epletrær og pæretrær er det i figur *n*?

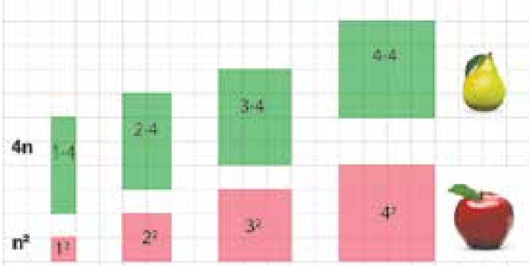
c) I figur 2 er det dobbelt så mange pæretrær som epletrær. I hvilken figur vil det være dobbelt så mange epletrær som pæretrær?



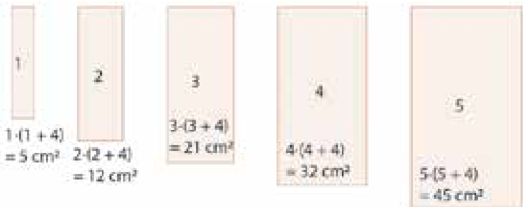
Figur 1: Oppgave fra Oslo-skolen

Figur-nummer	Antall epletre	Antall pæretre	Summen av pære- og epletre
1	$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot 4 = 4$	$1 + 4 = 5$
2	$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 4 = 8$	$4 + 8 = 12$
3	$3 \cdot 3 = 9$	$3 \cdot 4 = 12$	$9 + 12 = 21$
4	$4 \cdot 4 = 16$	$4 \cdot 4 = 16$	$16 + 16 = 32$
5	$5 \cdot 5 = 25$	$4 \cdot 5 = 20$	$25 + 20 = 45$
6	$6 \cdot 6 = 36$	$4 \cdot 6 = 24$	$36 + 24 = 60$
7	$7 \cdot 7 = 49$	$4 \cdot 7 = 28$	$49 + 28 = 77$
8	$8 \cdot 8 = 64$	$4 \cdot 8 = 32$	$64 + 32 = 96$
n	n^2	$4n$	$n^2 + 4n$

Tabell 1



Figur 2



Figur 3

$n^2 + 4n$, får enVi k $n(n + 4)$. Dette er et rektangel som illustrerer summen av antall epletrær og pæretrær som areal. Dette kan tegnes elegant i graftegneprogrammet GeoGebra eller i ruteboka (figur 2 og figur 3). En grafisk fremstilling er også en mulighet (figur 4).

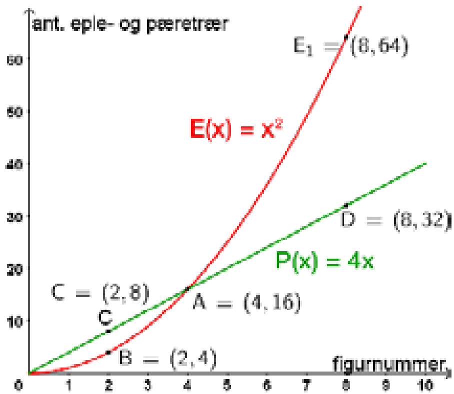
Punktene i den lineære funksjonen $4x$ viser antall pæretrær, og punktene i den røde grafen til andregradsfunksjonen x^2 viser antall epletrær. Her åpnes det for å diskutere hva skjæringspunktene mellom begge grafene betyr i praksis.

Elevene kan ikke minst observere det som skjer i figur nummer to, i forhold til det som skjer i figur åtte, og diskutere dette sammen.

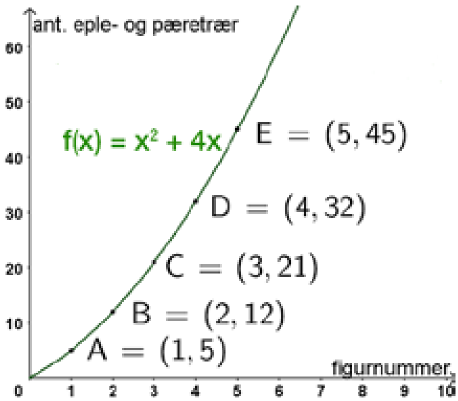
Punktene i grafen i figur 5 viser sammenhengen mellom figurnummeret og summen av antall epletrær og pæretrær. Definisjonsmengden som er interessant for oss, og som gir mening i denne oppgaven, er naturlige tall.

Elevene kan også arbeide med å finne andredifferansen (figur 6).

Den andre differansen er 2, som betyr at formelen blir en kvadratisk formel, altså



Figur 4



Figur 5

Figur 6

$ax^2 + bx + c$. En annen måte å representere sammenhengen på er likningssett og matriser for elever med høy læringspotensial som trenger utfordringer i faget. Dette går jeg ikke videre inn på her.

Som vi ser, er denne oppgaven en såkalt rik oppgave med «lav inngangsterskel» og «stor takhøyde». Den begynner enkelt slik at elevene våger å prøve, og oppgaven kan utvikles videre til virkelige utfordringer for elever på ungdomstrinner.

Det er for eksempel mange begreper i denne oppgaven som vi diskuterer og visualiserer i klassen:

Kvadratiske tall, kvadrater, rektangler, variabel, lineære funksjoner, kvadratiske funksjoner, definisjonsmengde, koordinatsystemet, naturlige tall, faktorisering, formler og multiplikasjon med parentes.

Vi kunne nesten gå gjennom halve pensumet på ungdomsskolen i arbeidet med denne oppgaven!

Avslutning av timen

Underveis i arbeidet med oppgaven pl-eier jeg å gå rundt og hører på hva elevene sier, og jeg diskuterer med dem. Fasit eller riktig svar er ikke fokuset, det viktigste er å forklare hvordan gruppen kom frem til løsninger, slik at deres evne til å resonnere, deres matematikkspråk og kommunikasjonsevne blir aktivisert. Spennende feil eller misoppfatninger blir diskutert høyt, og vi prøver som regel å komme til gode forklaringer i klassens fellesskap. Etter at elevene har arbeidet med oppgaven, starter vi klasseromdiskusjon hvor gruppene får presentere sine versjoner av løsningsforslag. Alle gruppene må presentere noe. Det vektlegges at presentasjonen skjer i fordomsfrie og trygge omgivelser, hvor feil blir sett på som en mulighet for videreutvikling og læring, og ikke som et personlig nederlag. I oppsummeringen sjekkes det at elevene har fått med seg hovedmålet med timen.

Mangfold i klassen

Vi har elever fra dem som arbeider med matematikk på barneskolenivå, til dem som tar forsert løp med matematikk på videregående. I tillegg til stor nivåspredning, har mange av elevene flerkulturell bakgrunn. Noen av dem strever med begreper og det norske språket. Elevene kommer med ulik skolegang, mer eller mindre lik den som er vanlig for ungdomsskoleelever oppvokst i Norge.

I klasseromsdiskusjoner velger jeg derfor å være nøye med hvilke begreper jeg velger, typen spørsmål jeg stiller, type respons jeg gir til elevene, og på hvilke representasjonsformer som passer bedre til den ene eller den andre oppgaven. Konkreter, bilder og digital visualisering blir ofte brukt i timene for å støtte begrepsinnlæringen og gi elevene knagger de kan henge kunnskapene sine på. Vi pleier også å ha noe som heter «begrepsbank», hvor elevene blir oppfordret til å forklare matematisk begreper med sine egne ord for å sjekke at de forstår de nye ordene de lærer, i tillegg til å illustrere dem visuelt.

I undervisningen får eleven også tid til å jobbe individuelt med nivådifferensierte oppgaver som støtter innlæringen av nye temaer. De blir tipset om relevante læringsressurser som ligger fritt tilgjengelig på internett, om det er spennende matematikkvideoer, kvalitetssikrede læringsvideoer i matematikk, nettsider, spill, bøker eller øvelser. Vi har også fast tid i timen hvor lekser blir sjekket og spørsmål elevene lurer på underveis eller i etterkant, blir gjennomgått grundig.

Noen ganger kan vi lage ting fysisk eller gå ut en tur for å finne på praktiske aktiviteter som støtter tema, noe som gir felles erfaringer som vi kan arbeide videre ut fra.

Et eksempel på en praktisk oppgave er: *Hvor mange dl is er det i en kroneis?* Da tar jeg gjerne med en kroneis og et litermål. Jeg presenterer problemet, og elevene får ulike redskaper for å undersøke kroneisen. Deretter kommer hver gruppe med en hypotese om hva de tror.

Oppgaven legger til rette for å bruke litermål for å konkretisere litersystemet som kan knyttes til «titallsystemet» vårt. Vi diskuterer hva det betyr i praksis at en kubikkcentimeter svarer til en milliliter, og hvordan overgangene er mellom de ulike enhetene, og hva det det betyr i praksis.

Hva betyr begrepene milli- og kubikk? Ingen begreper skal tas for gitt. Jeg arbeider for å sikre at elevene forstår innholdet i alle begrepene vi går gjennom. Vi undersøker videre hva som kan være logisk og fornuftig volumenhet som vi kan bruke knyttet til kroneis: liter, dl, cl eller ml?

Et viktig begrep i «begrepsbanken» kan være en kjegle. Hva vet elevene om en kjegle, hvordan kan de beskrive kjeglen med sine egne ord, og hva likner en kjegle på i hverdagen vår? Hvilke geometriske figurer får vi hvis vi bretter ut en kjegle? Hva betyr det i praksis at volumet til en kjegle er det samme som tredjedelen av volumet til en sylinder som har like stor sirkel i bunnen eller like stor bunnflate? Kan dette illustreres praktisk av elever eller meg?

Å lykkes i et praksisfelleskap

Vi er mange matematikklærere som arbeider mot et felles mål, at elevene våre skal utvikle matematisk forståelse og være glade i å arbeide med matematikk. For å lykkes, tror jeg det er viktig å danne praksisfellesskap mellom matematikklærere der vi får samtale med hverandre, observere hvordan andre gjør det, snakke åpent og ærlig om didaktikken vi utøver i klasserommene våre, og være kritiske til metoder og undervisningsmetoder som ikke når fram til den forståelsen vi søker å oppnå hos elevene våre. Slik kan vi kanskje alle bli modigere i å prøve ut ting i matematikkundervisningen?

Rathke

En matematisk verden

Å være matematikklærer er noe av det kjekkeste jeg vet, men til tider er det også veldig utfordrende. Jeg tror at matematikk er det faget hvor det er flest frustrerte og oppgitte elever: elever som ikke forstår det de skal lære, eller hvorfor de må lære det, og som ikke ser sammenhenger til hverdagen. Utfordringen min blir å bidra til at elevene lærer seg matematikk på en engasjerende, motiverende og gøy måte.

Bakgrunn

Jeg forstår elevene veldig godt, forstår frustrasjonen og følelsen av at det du lærer, ikke gir mening. Jeg satt selv i klasserommet for 15 år siden og var en av disse elevene som følte at det vi gjorde på skolen, bare var noe vi trengte der. Jeg så ikke nytteverdien i det jeg lærte, syntes det var vanskelig og lite interessant. Jeg skulle i hvert fall aldri bli lærer, aldri bli den stakkars personen som skulle få alle oss til å lære. Vel, nå sitter jeg her og er evig takknemlig fordi jeg har verdens beste jobb. Jeg får møte så mange flotte elever og får vise dem at det vi lærer på skolen, kan nyttiggjøres i hverdagen. At det er en mening med det vi lærer, og at vi faktisk kan få bruk for det utenfor skolen.

Anne-Marit Selstø Rathke
Rothaugen skole
anne-marit.selsto@bergen.kommune.no

Vi bruker matematikk flere ganger daglig: når vi beregner tidsbruk til og fra steder, når vi handler, lager mat eller pusser opp. Det er en del av den daglige hverdagsrutinen vår. Hvordan kan vi på best mulig måte vise denne nytteverdien til elevene? Hvordan kan vi få dem til å forstå at matematikk ikke bare er noe vi gjør på skolen, men noe vi også benytter oss av i hverdagen nesten uten å tenke over det? Dette er spørsmål som det er vanskelig å finne svar på – det finnes ingen «fasit». Som lærere må vi tenke ut dette selv, vi må selv finne en type undervisning som engasjerer og motiverer elevene. En type som gir dem en følelse av at det de skal lære, gir mening, at det har nytteverdi og relevans.

Elevene lærer på ulike måter. Noen lærer best ved at fagstoff gjennomgås på tavla, og at de får jobbe med oppgaver etterpå. Andre lærer ved å bruke faget i praktiske sammenhenger. Jeg ønsker alltid å nå flest mulig, derfor er det viktig å ha en variert undervisning som ikke bare retter seg mot ett, men flere læringsaspekter. Det hender ofte at jeg tar i bruk ulike typer teknologi for å motivere, vise nytteverdi og relevans for faget, og at jeg kombinerer prosjektbasert undervisning med både omvendt og tradisjonell undervisning.

Endring av undervisningspraksis

For tre år siden startet tre av oss lærere å lete etter nye måter å undervise og motivere elevene på. Vi utforsket nye undervisningsmetoder, og ikke minst utfordret vi oss selv. Vi ville endre hele undervisningspraksisen. Ulike typer teknologi og hjelpemidler ble tatt i bruk for å bygge opp under elevenes læring. Tverrfaglighet og prosjektbasert undervisning, hvor flere fag og emner kunne trekkes inn, ble viktig. Matematikk ble alltid flettet inn i prosjektene. Det handlet hele tiden om å gi elevene praktiske tilnærminger og å vise dem matematikkens nytteverdi.

Tidligere prosjekter

I løpet av de siste årene har vi hatt mange store og små prosjekter der vi har brukt ulike typer teknologi og hjelpemidler. Droner har blitt brukt for å vise sammenhenger mellom *x*- og *y*-aksen i koordinatsystem, for å snakke om gjennomsnittstid og -fart og for å jobbe med konstruksjonsforklaringer og målestokk. I artikkelen «Droner – lekende læring» (Selstø, Kibsgård & Pedersen, 2015) i tidsskriftet *Tangenten* utdypes dette undervisningsopplegget.

I prosjektet *Matematikk i arbeidslivet* var elevene ute og studerte matematikk i bruk. Der skulle de finne praktiske eksempler på hvor og hvordan matematikk ble brukt i ulike yrkesgrupper, for deretter å skrive om det de fant. Tekstene skulle publiseres i *Tangenten*. Til nå har to av disse tekstene blitt publisert, Bjørdal, Mjeldheim, Rashdan og Herheim (2017) og Tronstad, Graff og Herheim (2017). Hensikten med prosjektet var å vise at matematikk blir brukt i alle typer yrker, men i ulik grad. Elevene fikk erfare at matematikk var noe de ville få bruk for senere i livet.

Monument valley, Numberfeud (utgått) og World Peace Game er eksempler på ulike typer spill som vi har brukt. Monument valley og Numberfeud tilbys på app, noe som krever lite planlegging – i motsetning til World Peace Game som det krever mye planlegging og utstyr for å gjennomføre. World Peace Game er en politisk hands-on simulering der elevene i ulike lag skal utforske sammenhenger i verdenssamfunnet, tydeliggjort gjennom økonomiske, sosiale og miljømessige kriser og kriger som truer verdensbildet. World Peace Game er et tverrfaglig spill der temaene etikk, samfunnsoppbygning og økonomi er sentrale. Gjennom spillet får elevene en dypere forståelse av hvordan samfunnet og verden fungerer på ulike plan. Økonomi spiller en viktig rolle i spillet. Hvert lag må føre et detaljert budsjett der de redegjør for hvilke utgifter og inntekter de har hatt i løpet av de ulike spilldagene. Elevene blir overlatt til seg selv, de må selv finne løsningene på krisene, situasjonene og konfliktene de havner i underveis. De må samarbeide, ta egne velbegrunnede og gjennomtenkte avgjørelser og kunne forsvare disse.

Det å jobbe på denne måten er noe som kan overføres til matematikkfagets arbeid med problemløsingsoppgaver. Det kreves at elevene samarbeider og kommer fram til løsninger som fungerer, slik elevene også må i spillet. Vi ser at det er mange fordeler med å la elevene jobbe på en slik måte. De blir tvunget til å se annerledes på problemstillinger og ikke bare se etter den raskeste løsningen. De må tenke på hvilke konsekvenser løsningen de velger, får for spillets videre handling. Dette kan overføres til dagliglivet når vi overveier konsekvenser av handlinger for å finne ut om det er riktig å iverksette dem. Når elevene jobber på denne måten, blir lærerrollen vår endret. Som lærere må vi observere, lytte og veilede uten å gi elevene svarene.

Det er krevende å arbeide på denne måten. Som lærer kan man ikke være opptatt av hvor mange timer man har til faget sitt hver uke, man må være fleksibel og løse opp egen timeplan. Det handler ikke lenger om bare å være faglærer i eget fag, men å være lærer i ulike fag, alt etter hvilke prosjekter man jobber med. Det handler om å tørre å miste litt kontroll, å ikke alltid vite hvordan sluttresultatet av prosjektet blir. Vi må være i læringsgropen sammen med elevene, vise dem at vi også lærer underveis og sammen med dem, utforske ulike spørsmål og problemstillinger som dukker opp. Slik kan vi bruke elevenes sterke sider. Ofte innser vi at elevene lærer fortere enn oss, og det er helt greit. Dette har vi særlig erfart når det gjelder innsikt i og bruk av tekniske hjelpemidler. For oss lærere handler det da om å la elevene være eksperter og la dem lære andre, både lærere og medelever i klassen. De siste årene har vist hvor viktig det er å være i gode team. Vi har hatt et team som jobber tett, og som har samme mål for undervisningen. Det er et team som drar i samme retning.

Nye prosjekter

Vi er bitt av basillen når det gjelder å jobbe med ulike typer teknologi, tverrfaglig og prosjektbasert. Stadig leter vi etter nye prosjekter, utfordringer og samarbeidspartnere. Nå har vi 8. trinn og skal i gang med flere spennende nye prosjekter i tillegg til videreføring av prosjekter vi tidligere har hatt suksess med. Vi samarbeider for eksempel med Høgskolen på Vestlandet (HVL) om drama og matematikk. Ved hjelp av et dramaforløp skal elevene arbeide med ulike matematiske emner. De skal løse ulike problemer de støter på i et dramaforløp, der fokuset er roller som nysgjerrigper, mekler, skeptiker osv.

Et samarbeidsprosjekt med Vilvite er også i startfasen. Der skal teknologi knyttes opp mot matematikkfaget. Prosjektet er omfattende, og flere skoler i Bergen deltar. Sammen med Vilvite skal elevene lage en boligutstilling. Ved hjelp av ulike materialer og teknologi skal elevene skissere og bygge boligmodeller. Elevgrupper skal lage sin del av en større boligmodell. De vil jobbe med matematiske emner som arbeidstegning, målestokk, areal, omkrets og økonomi. Hver gruppe får utlevert en MDF-plate som skal være hovedmateriale for oppgaven. De skal selv lage arbeidstegning hvor de skisserer sin del av modellen ut fra en gitt målestokk. Hver gruppe skal lage et budsjett for modellen sin. Elevene får se hvordan ulike matematiske emnene brukes i det virkelige liv. De vil møte reelle problemstillinger knyttet til hvordan man bygger bolig, hvordan man bruker ulike tekniske hjelpemidler, og jobbe med praktisk bruk av matematikk. Elevene må selv ta stilling til utfordringer og finne løsninger i hele prosessen, fra arbeidstegninger til ferdige boligmodeller.

De tre siste årene har vært svært lærerike for meg. Sammen med mine to kollegaer har jeg samarbeidet med mange ulike aktører som har hjulpet oss i små og store prosjekter. Jeg er takknemlig for at jeg har vært en del av utviklingsprosessen sammen med teamet mitt. Samarbeidet har utviklet meg som lærer. Nå gleder jeg meg veldig til å ta fatt på nye, spennende og interessante prosjekter i tiden fremover.

Referanser

Selstø, A.-M., Kibsgård, L.-M. & Pedersen, T. (2015). Droner – lekende læring. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 26*(1), 10–13.

Mjeldheim, G., Bjørdal, E. S., Rashdan, A. J. I. & Herheim, R. (2017) Matematikk og forsikring. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(1), 25–28.

Tronstad, T. Graff, S. & Herheim, R. (2017). Matematikk i musikkbransjen. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(2), 23–25.

Jensen

Elever finner matematikk

Jeg har vært så heldig at jeg har fått undervise i matematikk i hele grunnskolen. Innsikt i hva elevene skal mestre etter tiende trinn, og hvilke utfordringer de møter underveis, har hjulpet meg til å stake ut kursen i de tidlige årene. Samtidig har innsikt i det tidligere arbeidet hatt betydning for arbeid på de høyeste trinnene. Selv de yngste elevene, eller kanskje spesielt de, kan ha matematikkbriller på og jobbe utforskende, finne matematikk i situasjoner og samtale om det. Det har tatt tid og erfaring som lærer å få til å gripe situasjoner som oppstår, lage inkluderende arbeidsfellesskap og gi gode tilbakemeldinger som fremmer elevers mestring og motivasjon. Denne teksten handler om en situasjon som ga gode matematikkøkter, der elevene var aktive, kreative og reflekterende over egne svar.

Femte trinn på skolen har doblet elevtall i løpet av få år. En dag rektor var på besøk, snakket hun om dette. Hun fortalte elevene at hun på vei til jobb hadde tenkt at hvis alle elevene på skolen stilte seg på rekke, hånd i hånd, ville de kanskje være så mange at rekken nådde butikken i Sædalen. Etter at hun hadde gått, sa en av elevene at vi burde finne ut av dette. Jeg ga ham oppdraget, og sammen med tre andre gutter gikk de i gang. Det første de foreslo, var å be alle elevene på skolen stille opp hånd i hånd, så kunne de se om rekken ble så lang at de rakk helt til butikken. Forslaget ble raskt forkastet. De innså at det ikke ville la seg gjennomføre fordi det alltid var noen elever som ikke var på skolen, syke eller opptatt med aktiviteter de ikke kunne avbryte. En annen av guttene foreslo at de kunne bruke ti elever, stille dem opp hånd i hånd og måle hvor langt dette var. De kunne deretter bruke lengden til å regne ut hvor mange meter rekken med alle elevene ville bli. Han argumenterte med at det var enkelt å gange med ti. De andre støttet ideen, og jeg avtalte med guttene at de skulle presentere ideen for resten av trinnet i neste økt.

Renate Jensen
Bergen kommune, avdeling skole
renate.jensen@bergen.kommune.no

Jeg blir stadig positivt overrasket over hvor gode elever er til å finne situasjoner de kan og ønsker å regne på. For å få dette til å bli mer enn en happening er det viktig at jeg som lærer mestrer å lede gode matematikksamtaler. Jeg har hatt god hjelp av teori om samtaletrekk (Wæge, 2015) som fokuserer på hvordan lærere kan bruke matematiske samtaler til å fremme elevers tenkning og læring i matematikk. Dette er et redskap som kan brukes for å gjennomføre og øke mengden av samtaler med høy kvalitet.

Dagen etter fikk guttene starte matematikkøkten, og de la fram det de hadde tenkt for de andre elevene. Når elever snakker om matematikk, kan det noen ganger være vanskelig å forstå dem, selv om de tenker og resonnerer på fornuftige måter. Min jobb er å sikre at ikke bare forståelige bidrag blir tatt i betraktning. Jeg trenger et redskap som kan bidra til å få klarhet i hvordan elevene tenker, og som kan hjelpe andre elever til å følge med på hvordan medelevene resonnerer. Samtaletrekket «gjenta» er et slikt redskap. Jeg gjentar helt eller delvis det en elev sier, for på denne måten å få med så mange av medelevene som mulig. Eleven som eier forslaget, får også på denne måten anerkjennelse for det som er sagt.

De andre elevene på trinnet mente guttene la fram en fornuftig plan. De ble enige om at de mestret det de trengte for å kunne bruke denne framgangsmåten. De hadde også tilgjengelig måleutstyr de kunne bruke. Men så sa en av jentene at det sikkert var stor forskjell på hvor langt det ville bli med ti førsteklassinger og ti elever fra 10. trinn. Dette måtte de tenke litt på, og jeg gav dem litt summetid i par. Et av parene foreslo at det riktige var å bruke elever på femte trinn. De var jo på midten. Elevene ble etter litt diskusjon enige om at dette var en god og enkel løsning – de var jo femte trinn. Økten ble avsluttet med at parene fant et svar de trodde var altfor langt, og et svar de trodde var altfor kort. Dette var for å starte en tankeprosess hos alle og få elevene til å mene noe om arbeidet videre.

Utfordringen min var nå å legge til rette for framdrift og sørge for at arbeidet hadde et mål som elevene ble kjent med. Hva skulle være fokus? Hvordan skulle jeg knytte dette til planene for trinnet? I slike aktiviteter bruker jeg forberedelsesark med mål, sentrale begrep og ferdigheter (se et eksempel neste side). Jeg beskriver organisering og tenker over spørsmål som skal bringe elevene framover i arbeidet, samler opplysninger jeg trenger, og så videre.

Elevene ble i neste økt satt i grupper med oppdrag å lage en plan for arbeidet. Sammen kom vi fram til følgende:

- Alle gruppene skulle starte med å gjennomføre måling av ti elever for å sikre at resultatet ble riktig.
- De skulle måle elevene når de holdt hverandre i hendene og strakk ut armene som mye de kunne, for da ville rekken bli så lang som det var mulig.
- Alle gruppene skulle finne en løsning på hvordan de skulle måle avstanden fra skolen til butikken. De skulle gjennomføre målingen etter skolen.
- Vi måtte arbeide mer med hva som er i midten – det vil si sentralmål.
- Alle gruppene skulle komme med et forslag til hvordan resultat kunne presenteres for rektor.

De gikk først i gang med å måle ti elever som sto hånd i hånd. Resultatene skrev de på tavlen etter hvert som de var klare. Deretter skulle de måle distansen fra skolen til butikken. Noen valgte å låne et målehjul fra matematikkrommet, noen søkte på nettet, og noen fikk foreldrene til å hjelpe ved å kjøre denne strekningen og lese av på kilometertelleren.

Både målingene av strekningen og målingene gjort av de ti elevene på rekke ga mange fine diskusjoner om måleenheter og måleusikkerhet. Vi snakket om muligheter. Skulle vi finne gjennomsnittet av målingene, eller var det mest riktig å bruke det de fleste gruppene hadde fått? Begreper som gjennomsnitt, typetall og median ble nyttige. Elevene ble enige om at de ønsket å bruke typetallet, resultatet som flest grupper hadde fått. Gjennomsnittet mente de at ikke ville være en god idé. De fleste gruppene hadde et resultat som lå nær 2 km, men en av gruppene hadde fått litt mindre enn 300 meter. Hva ville konsekvensen være om deres resultat ble tatt med i beregning av gjennomsnitt? Dette ble oppgave for pararbeid. Mange var frustrerte i starten fordi de ikke ble enige om hvordan de kunne regne når noe var i meter og noe var i kilometer. Men alle kom, med mer eller mindre hjelp underveis, fram til et tall for gjennomsnittet. De fant deretter medianen og så at det var ganske likt typetallet i denne situasjonen.

Vi fikk mange gode samtaler om regnestrate-

Forberedelses- og notatark underveis for lærer

Første økt Organisering: Mål: Viktige begreper: <u>Elevene gjetter</u> For høyt/stort: For lavt/lite: Hva tror de svaret blir?	**Andre økt** Hvordan tror du elevene går fram for å svare på spørsmålet? Hvilke problem kan de støte på, og hvordan komme videre? Viktige begreper: Ferdigheter: Underveisvurdering:
Siste økt Egenvurdering: Vurdering fra samarbeidspartner/lærer: Presentasjon:	**Oppfølgingsspørsmål/differensiering**

gier, bruk av ulike måleredskaper og omgjøring av måleenheter. Spesielt fikk vi muligheter til å arbeide med multiplikasjon og divisjon med dekadiske enheter. Elevene forklarte for hverandre og var opptatt av å utdype hvorfor svarene de hadde funnet, måtte være rette.

Vi gjorde stopp underveis for at elevene skulle vurdere arbeidet de hadde gjort i par og i grupper. De har ordbøker som de benytter når de ønsker det. I starten øvde vi på hvordan og når ordbøker kunne brukes effektivt. Mange skrev på et eget ark opp begreper de møtte underveis. Det kunne være fagbegreper, men også andre ord de ikke visste hva betydde. Når de hadde tid, lagde de en forklaringsside til ordet/begrepet. Mange brukte disse ordbøkene underveis i prosessen – begreper som ble forklart, var sentralmål, gjennomsnitt, median, typetall, titallsystemet, måleenheter, kilometerteller, målehjul, meter og kilometer.

Gruppen som startet arbeidet, fikk avslutte med å presentere resultatet for rektor. De hadde tatt bilde av stedet der rekken med elever sluttet. Det var et godt stykke før butikken. De forklarte utregninger og beskrev framgangsmåten de hadde brukt. De forklarte også en utregning som viste at det trengtes 1414 elever for å nå helt fram. Oppgavene fant elevene fram til i fellesskap. De gjorde god bruk av begreper når de beskrev framgangsmåtene sine.

Elevene lagde til slutt en side med utregninger, tegninger og bilder. Dette skulle de presentere for en voksen hjemme. Slik fikk alle trening i å forklare både muntlig og skriftlig. De valgte om de ville gjøre dette arbeidet i par eller alene.

Jeg ønsker at elevene skal utvikle helhetlig matematisk kompetanse som er kjennetegnet ved begrepsforståelse, fleksibilitet i arbeidet med matematiske problem, utforskning og resonnering. Et mål er at elevene får en positiv innstilling til faget og motivasjon for mer læring. Det blir derfor et viktig fokus å lede undervisningen fram mot læringsmålet, gi respons til elevenes resonnering, få elevene til å orientere seg mot hverandres ideer og gi elevene mulighet til å medvirke og snakke om hva de har lært, og hvordan de lærer. Dette krever oppgaver og situasjoner som er åpne og utforskende. En metode som har vært nyttig, er arbeidsmåten *Matematikk i tre akter* (Wallace & Jensen, 2017). Dette er en metode der elevene får arbeide undersøkende, og som har vært til god hjelp for meg for å forberede, strukturere og vurdere samtaler og aktiviteter. Matematikk i tre akter har jeg brukt med elever på ulike årstrinn, der elevene med utgangspunkt i en konkret situasjon skal finne ut hva de kan regne på, lage matematikkoppgaver og løse disse. Elevene må gjennom samtale finne matematikken i situasjoner de får presentert i form av for eksempel konkreter, bilder eller film. Arbeidsmetoden krever samarbeid, elevene skal selv avgjøre hvordan matematikken kan hjelpe dem til å løse et problem, stille opp de matematiske uttrykkene, utføre beregningene og tolke resultatene og deres gyldighet i forhold til det opprinnelige problemet. For å mestre denne kompetansen trenger elevene å være aktive, kreative og kunne kommunisere i faget.

Det er en stor gevinst ved å arbeide på denne måten at elevene etter en tid selv blir de som finner matematikken. Det at de gjør erfaringer med at samarbeid og virkelighetsnære situasjoner er spennende og nyttig, mener jeg gir matematikkøkter som oppleves som relevante og interessante å arbeide med. Vi får gode felles referanser som er nyttige i videre arbeid. Det blir spennende arbeidsøkter for både elever og lærer.

Referanser

Wæge, K. (2015). Samtaletrekk – redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 26*(2), 22–27.

Wallace, A. K. & Jensen, R. (2017). Matematikk i tre akter. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(3), 2–7.

(fortsatt fra side 2)

formidler og har en egen evne til å få sitt publikum med seg, noe hun ikke minst demonstrerte under Holmboesymposiet, der nesten 200 deltakere hadde møtt opp for å se og høre Hanan Abdelrahman og professor Jo Boaler. Det illustrerer kanskje prisvinnerens karisma at hun avsluttet sin forelesning med å få 200 personer til å synge og danse til den fengende James Brown-låta «I feel good».

Også utenom sin lærerjobb bidrar Hanan på en forbilledlig måte. Hun holder kurs for foreldre og har gitt ut boka *Mattehjelperen – Leksehjelp for foreldre og elever på ungdomsskolen*. Hun stiller selv opp på to biblioteker for å gi leksehjelp, og hun er spaltist i *Aftenposten junior*. Etter at hun vant Holmboeprisen, er oppdragene blitt stadig flere. Hanan har et uvanlig godt medietekke og har gjennom sine mange opptredener i TV, aviser, og andre medier blitt allemannseie og en strålende ambassadør for matematikkfaget.

Rennemo, Søvik, Meberg

Utviklende matematikklæring

Innledning

Høsten 2014 startet Lura skole opp med en ny undervisningsmetode i matematikk, Utviklende opplæring i matematikk (heretter kalt UOM, se tekstboks om UOM i Sandnes kommune). UOM utfordrer pedagogen til å undervise slik at matematikklæring skjer på elevens premisser, med læreren som veileder. Det er fokus på elevenes observasjon, analyse og logiske tenkning. Det gjelder ikke bare å finne svaret, men også hva som ligger bak svaret (Melhus, 2014). Elevene blir vant til å forklare og begrunne oppgaver ved hjelp av forskjellige løsningsstrategier. Det legges stor vekt på presis faglig språkbruk.

Samtale og begrepsutvikling

UOM kalles gjerne samtalematematikk. Vi bruker store deler av timen til felles klassesamtale der vår rolle er å være veileder og stille de gode spørsmålene. Elevene gjør oppdagelser og deler tankene sine med medelever. Elevene må på denne måten lytte aktivt til det de andre i klassen sier, og ta stilling til om de er enige, eller om de selv sitter med andre tanker.

Monica Gilje Rennemo
Lura skule
monica.gilje.rennemo@sandnes.kommune.no

Wenke Leonora Søvik
Lura skule
wenke.leonora.sovik@sandnes.kommune.no

Laila Karin Olsen Meberg
Lura skule
laila.karin.olsen.meberg@sandnes.kommune.no

Figur 1: Elever er muntlig aktive

I undervisningen bruker vi mange matematiske begreper. Disse oppdages og bygges systematisk opp sammen i klassen, slik at alle elevene utvikler en felles forståelse for hva begrepene inneholder. Dette gjør det lettere å skape en meningsfull kommunikasjon i klassen fordi elevene har en felles forståelse. Ved å uttrykke sine tanker muntlig får elevene ryddet opp i egne tanker, de bruker begrepene aktivt når de begrunner og argumenterer for løsningene sine, og medelever vil kunne oppdage andre måter å tenke på enn sin egen. Ofte kan en medelevs forklaring være mer forståelig enn en lærers forelesning. Underveis videreutvikles matematikk-

Utviklende opplæring i matematikk (UOM)

- Initiativ fra Gerd Inger Moe, samarbeider med Kjersti Melhus og Natasha Blank ved Universitetet i Stavanger.
- Utviklet av Leonid Zankov, student av Lev Vygotskij. Zankov videreførte Vygotskijs teorier om læring og undervisning i sonen for nærmeste utvikling og utviklet fem hovedprinsipper (Melhus 2014):
  1. Undervisning på høyt nivå
  2. Ledende rolle av teoretisk kunnskap
  3. Rask gjennomgang av stoffet
  4. Bevisstgjøring av barna i egen læringsprosess
  5. Systematisk og målrettet utvikling av hvert eneste barn i klasserommet

- UiS arrangerer samlinger for lærere som underviser etter modellen. Lura skole fungerer som ressursskole i kommunen. Dette innebærer observasjonsbesøk og refleksjonssamtaler med andre lærere som har erfaring med modellen, og introduksjon eller tips for dem som ønsker å lære om modellen.
- Andre artikler om UOM finnes i tidligere nummer av Tangenten som Melhus (2015) og Moe (2015) og i Bedre skole, Moe og Moe (2016).

språket, og når barna har et språk for tankene, styrker dette læringen.

Eksempel fra en samtale på 1. trinn

Lærer: Sammenlikn uttrykkene 3 + 5 og 5 + 3. Hva legger du merke til?
Mari: Begge uttrykkene har samme tall.
Janne: Jeg ser at uttrykkene har addisjonstegnet.
Emma: Det blir samme verdi i begge uttrykkene.
Truls: 3 + 5 = 8 og 5 + 3 = 8 fordi det er jo den kommutative loven for addisjon.
Lærer: Hva mener du med den kommutative loven for addisjon?
Truls: Når vi bytter plass på første og andre ledd ved addisjon, vil det fortsatt bli samme verdi.

Elevutsagnene viser at elevene analyserer eksempelet og presenterer og begrunner sin forståelse for hverandre med presise begreper. Vår rolle er å veilede elevene, mens elevene styrer samtalen og på den måten eier matematikken. De gjør oppdagelser og ser sammenhenger som er med på å skape eierforhold til begrepene, matematikken og forståelsen. Når undervisningen i så stor grad baserer seg på klassesamtale, gir dette høy elevaktivitet. For at flest mulig skal kunne bidra til felles klassesamtale, har vi innført kommunikasjonstegn i form av «jeg er enig», «jeg tenker noe annet» og applaus for innsats. Dette opplever vi som noe som er svært positivt for klassemiljøet.

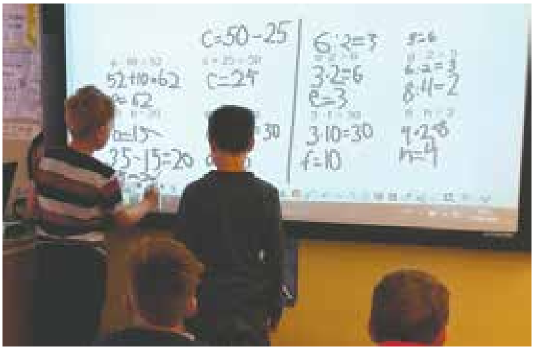
Undervisningens oppbygning

På Lura skole skal elevene i starten av hver time møte noe de behersker, og målet er at de skal gå fra hver time med en følelse av mestring og av å ha lært noe nytt (Melhus, 2014). Vi velger å dele timen inn i fire deler:

- *Grublis*: Motiverende oppstartsoppgave som er klar på tavlen idet elevene kommer inn i klasserommet. Målet med oppgaven er å pirre elevenes nysgjerrighet og interesse. Alle elevene kan bidra på sitt nivå. Oppgaven løses sammen med læringsvenn.
- *Nytt stoff*: Oppgaven inneholder elementer av kjent stoff, men tilføyer samtidig ny kunnskap. Nye oppgaver gjennomføres i fellesskap.
- *Kjent stoff*: Denne oppgaven er repetisjon av tidligere gjennomgått pensum. Gjennomføres oftest som selvstendig arbeid.
- *Avslutning*: Oppsummeringsspørsmål knyttet til nytt stoff som er introdusert i timen, og/eller ren regnetrening.

Noe av det vi har fokus på i undervisningen, er at vanskelig er bra, da strekker vi oss. Alle kan lære matematikk! Boaler (2015) skriver at vi ikke er født med matematikkhjerne, og vi vektlegger at alle elevene kan bidra med noe i gruppen, samt oppleve mestring på sitt nivå.

Siden UOM baserer seg på Vygotskijs teorier om nærmeste utviklingssone, legges undervisningen på et høyt nivå som barnet alene ikke er i stand til å mestre. Sammen med støtten fra klassekamerater og lærerens stillasbygging gjennom blant annet veiledning kan elevene oppdage og lære.



Figur 2: Likninger på 2. trinn

På bildet (figur 2) viser et læringsvennpar på 2. trinn hvordan de løser likningen $35 - b = 20$. Guttene begrunner at b må være lik 15, fordi at «når b er lik 15, blir det en sann likhet. 35 – 15 = 20 blir riktig! Vi kan også finne den ukjente ved å trekke 1. ledd fra verdien av summen, da finner vi 2. ledd (den ukjente) 35 – 20 = 15.»

Bildet viser også løsninger fra andre læringsvennpar som blant annet har vist at når 1. ledd er ukjent, kan den motsatte regneoperasjonen brukes for å finne roten av likninger. Vi korrigerer ikke føring eller løsningsstrategi. Elevene forklarer og blir alltid applaudert for sine flotte tanker. Vi gir veiledende spørsmål hvis det er behov for det underveis, og forsikrer oss om at elevene avslutter med mestring.

Metodikken i UOM er basert på hurtig progresjon og hyppig repetisjon. Ved å repetere kjent stoff i korte intervaller har vi erfart at barna husker stoffet lettere.

For å få til en rask progresjon og hyppig repetisjon er det viktig for oss med effektivitet, både hos elever og lærere. Derfor gjør vi lærere klart alt før timen starter. Vi deler ut bøker og annet materiell som trengs, oppgaven er klar på tavlen, og når det ringer inn, står læreren klar. Elevene har trent seg på å være effektive i garderoben. På de laveste trinn har vi regnetrening mens de kler av seg. Når elevene går inn i klasserommet, er oppmerksomheten rettet mot oppgaven på tavlen. Læreren må hele tiden ha fokus på å holde fremdriften i timen, stille gode spørsmål for å få elevene til å komme fram til den konklusjonen en ønsker. Vi styrer klassesamtalen for å holde tempoet oppe, slik at oppgaven ikke drøyer og elevene ikke faller av fordi det er for lett eller for vanskelig.

Matematiske sammenhenger

Læreverket *Matematikk* (Blank, Melhus & Moe, 2014a) har en annen oppbygning enn de fleste andre norske læreverk da det ikke er organisert i atskilte matematiske temaer, men man jobber med nytt stoff og kjent stoff innenfor flere ulike emner samtidig. I stedet for å ha mange oppgaver i for eksempel geometri er vi innom flere matematiske temaer i hver time. Siden hver ny oppgave er i et annet tema, blir elevene utfordret til å tenke i nye baner fremfor å følge en «mal» og bruke samme mal på alle oppgavene. Vår erfaring er at dette gjør at elevene lettere oppdager matematiske sammenhenger. Ved å oppdage nye sammenhenger vil elevene kunne utvikle stadig mer hensiktsmessige strategier, som de tar i bruk etter eget valg.

Eleveksempel 1. trinn

I dette eksempelet analyserer elevene i fellesskap bildet først (figur 3 neste side). *Blir det nok gulrøtter hvis kaninene tar en hver? Hvor mange kaniner er det? Hvor mange gulrøtter? Er det flest kaniner eller flest gulrøtter?*

Figur 3: Oppg. 61 (Blank, Melhus & Moe, 2014b, s. 32)

Etter samtalen der detaljene rundt bildet er blitt diskutert, får elevene se to modeller (figur 4). Hvilken modell passer til bildet?

Figur 4: Oppg. 61 (Blank, Melhus & Moe, 2014b, s. 32)

Jan: Jeg tenker at modellen til venstre passer til bildet.
Lærer: Hvorfor tenker du at modellen til venstre passer til bildet?
Jan: Fordi der skal sirklene være gulrøtter, for det er ni gulrøtter og ni rosa sirkler. Og så passer det med seks kaniner, og det er seks blå firkanter.

Noen elever viser tegnet «jeg tenker noe annet».

Lærer: Jeg ser at du tenker noe annet, Liv. Hva tenker du her?
Liv: Jeg tenker det samme som Jan, men jeg synes også modellen til høyre passer med bildet. Se det er jo ni firkanter og seks sirkler. Det kan òg passe med ni gulrøtter og seks kaniner!
Erik: Begge modellene passer! Det er bare det at her står symbolene for forskjellig. Til venstre står symbolene sirkler for gulrøtter, mens til høyre står symbolene sirkler for kaniner.

Etter at klassen i fellesskap stadfester at begge modellene passer, går samtalen videre til å se nøyere på modellene og hvordan vi kan bruke disse når vi skal finne ut hvor mange flere gulrøtter det er enn kaniner. Elevene bruker modell som redskap for å tydeliggjøre begrepene «hvor mange flere» og «hvor mange færre». Elevene må her begrunne svaret. De kan tydelig se på modellen at det er tre flere figurer i raden som viser gulrøtter.

Elevene får så spørsmål om hvilket tall som er størst: 6 eller 9?

Når elevene har svart på spørsmålet, blir de utfordret på å gi et begrunnet svar på om disse likhetene er riktige: 6 = 9 og 9 = 6.

Kari: Det er ikke likheter, for 6 er jo mindre enn 9. De er ikke like mange.
Lærer: Godt forklart! De kan ikke være likheter, for de er jo ikke like mange. I matematikken bruker vi spesielle symboler for å si om et tall er større eller mindre enn et annet. De ser slik ut: > og < (tegner på tavla). Vi bruker tegnene slik: 9 > 6 og 6 < 9. Dette kalles ulikheter. Legg merke til hvor åpningen er.
Nina: Åpningen er mot det største tallet.
Lærer: Åpningen er alltid mot det største tallet. Vi leser dem slik: *Ni er større enn seks, seks er mindre enn ni.* Tegnene >, < og = (skriver på tavla) kalles relasjonstegn. Si i kor: *re- la- sjons- tegn.* Her skriver jeg tallene 1 og 4. Hvilket relasjonstegn passer når vi skal sammenlikne tallene 1 og 4?

I dette eleveksempelet ser vi hvordan elevene selv finner en sammenheng mellom bildet og modell og så en sammenheng mellom modell og tall. De prøver å skape en mening i det de observerer. Oppdagelsene kommer fra dem selv, med veiledning i form av spørsmål som elevene da diskuterer. Vi ser mange aha-opplevelser hos elevene ved å stille spørsmål som de selv skal komme fram til i fellesskap. Noen kommer med et poeng, andre bygger videre på dette. Til slutt kommer man fram til hovedmålet med oppgaven. I dette eleveksempelet var hovedmålet introduksjon av relasjonstegnene større enn og mindre enn.

Oppgavene i UOM er utfordrende, og elevene blir ikke vist eksempler på hvordan de skal løses. Dette ivaretar elevenes kreative løsninger, det er mange veier til svarene. Det at vi gjennom samtale med elevene drøfter de ulike løsningene og veiene dit, gir mulighet for flere barn å oppleve mestring. Slike undervisningsprosesser bidrar til at elevenes tanker forblir åpne og kreative, samtidig som elevene øves i selvstendig tankegang.

Eleveksempel 3. trinn

Et eksempel på en problemløsningsoppgave der elevene øver på å tenke logisk (figur 5).

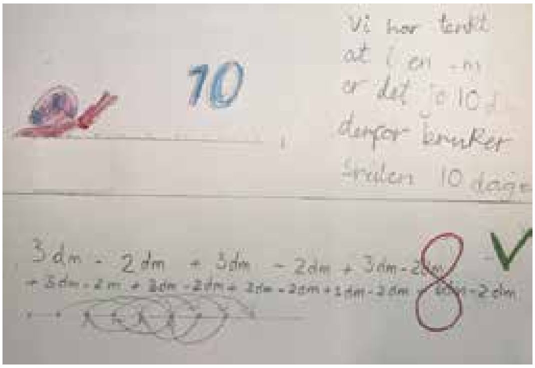
Figur 5: Oppgave 433, s. 117 i Blank, Melhus & Moe (2016)

Elevene settes først i gang sammen med læringsvenn for å drøfte løsninger uten noen informasjon fra læreren.

Elevene svarer:

– Vi tenker at sneglen bruker 10 dager fordi det er 10 dm i 1 m.
– Vi tenker han kanskje bruker 20 dager, for dag er jo dag og natt er natt.
– Vi må tenke døgn istedenfor dager! Den kryper 1 dm oppover pr døgn!
– Siste dagen han kryper oppover, sklir han ikke ned igjen for da er han jo på toppen!
– Han kryper 1 dm oppover 8 ganger før han er på toppen. Den 8. gangen, sklir han ikke ned igjen.

Figur 6 viser et eleveksempel på et løsningsforslag et læringsvennpar har laget.



Figur 6: Elevers løsningsforslag

I oppgaven er det også gitt to ulike løsningsforslag til elevene: *Stine: «Jeg fikk 10 dager.» Eline: «Jeg fikk 8 dager.»* Disse ble vist til elevene etter at de først hadde drøftet sine ulike forslag til løsning.

En god del av elevene våre mente at løsningen måtte være 10 dager ettersom de har kunnskap om at det er 10 dm i 1 m – og det er bra! Men nå viste det seg at løsningen ikke var så enkel. Ved å tenke mer ble løsningen annerledes. Likevel gir ikke elevene uttrykk for å bli mismodige etter å ha foreslått feil svar, for det var jo mange som mente det – til og med i boken var det en elev som hadde svart 10 dager! Elevenes strategi er god, og i en annen oppgave ville denne tankegangen fungert supert, men i denne oppgaven finner de ut at de måtte tenke annerledes. Og på denne måten dras elevene videre i utviklingen sin.

En av elevene så løsningen med en gang han leste teksten. Gjett om han var fornøyd etterpå!

Elevsyn og læringsmiljø

Når vi jobber med UOM, har vi en tanke om at alle kan lære seg matematikk. Målet er å få til en optimal utvikling hos hvert enkelt barn.

I undervisningen har vi fokus på at sammen får vi til mer. Vi ønsker at alle elevene skal delta og dele tankene sine. Feil er verdifulle. Det er viktig å snakke om feil og misoppfatninger, slik at det kan avklares. Gjør man feil, endrer man tankesett og dermed husker man bedre – det er når man gjør feil, at man lærer. Ved å gjøre feil til noe positivt våger flere elever å delta i timen. Samtidig jobber vi med at vanskelig er bra; det er for at elevene skal få utfordring. Det er gøy med utfordrende oppgaver. Det er en treningssak å holde ut når oppgaven er vanskelig, og ikke gi opp for lett. Elevene opparbeider stayerevne. Mestringsfølelsen man får etter å ha jobbet hardt, veier ofte tyngre enn oppgaver som ikke krever samme kognitive utfordring.

Ettersom vi har jobbet etter denne modellen i noen år, har vi oppdaget at det ikke er bare matematikk elevene lærer seg, de tilegner seg også sosial kompetanse samtidig. Sosial kompetanse og faglig kompetanse går hånd i hånd. Elevene må lære seg å vente på å få ordet, ta ordet, tenke mottaker når de forklarer seg, og lytte til medelever. Dette er kjent, det gjelder i alle fag – også utenfor klasserommet.

Måten vi jobber med matematikkfaget på med både læresamtale, læringsvenn, applaus og de andre to kommunikasjonstegnene, er med på å bygge en fellesskapsfølelse i klassen. Se vi heier på deg! Vi klarte det! Vi er gode! Sammen bygger de mestringsfølelse hos hverandre og en flott fellesskapstanke om et trygt og godt læringsmiljø i klassen!

Det å være oppmerksom på egen læring er en viktig del av undervisningen. Elevene får vite litt om modellen vi bruker, de får vite litt om Zankov og Vygotskij, de blir bevisstgjort hvor mye egen deltakelse i timene betyr for klassen.

Oppsummering

Noen oppfatter matematikk som et fag der en har enten rett eller feil løsning. Den største gleden ved å undervise etter denne modellen er fokuset på veien mot løsningen fremfor selve svaret. Vi vektlegger at alt elevene bidrar med i den matematiske samtalen, er positivt for løsningen. Måten vi bruker feil svar på til å lære, gjør at alle elevers innspill blir betydningsfulle og viktige. Læreren vet fasiten, men ER ikke fasiten – den eier elevene.

Da vi startet opp matematikkundervisningen etter denne modellen for tre år siden, var det å takle elevenes innspill det mest utfordrende for oss lærere. Vi kunne jo ikke forutse alle løsninger elevene ville foreslå. Nå er det en befrielse, og til tider fornøyelse, å lytte til elevenes løsningsforslag og nærmest være en ordstyrer i debatten mot løsningen. Dette krever likevel god forberedelse av oss som lærere ettersom vi må være god på å forstå hvordan elevene tenker, og av og til må vi tydeliggjøre utsagnene deres. Begreper for matematiske prosesser blir viktig. Det gjør det enklere for elevene å uttrykke tankene sine – og forstå hva andre snakker om. Tankeprosesser settes i gang, og utvikling skjer.

Vi har erfart at elevene lærer seg problemløsning på flere plan. Å jobbe med matematikk er å lære seg å tenke. Lære seg å løse problemer. Det å kunne se problemer fra ulike synsvinkler, argumentere saklig for sitt synspunkt, men også forstå og respektere andres synspunkt, er utelukkende en nyttig kompetanse å ha med seg i livet.

Vi ser en klar endring i elevenes matematikkglede etter at vi begynte å jobbe med Utviklende opplæring i matematikk. Mye er takket være en ledelse på Lura skole som har støttet oss i omleggingen til UOM. Dette har gjort at vi kan tilrettelegge for elevene på en god og tilfredsstillende måte. Med ledelsen i ryggen og et godt og tett foreldresamarbeid ser vi at matematikkmotivasjon og resultater ved skolen er betraktelig hevet. Vi ser dessuten at læringsgleden for matematikk også gir økt læringsglede generelt. Læringslyst og læringstrykk, iver, selvstendig og kritisk tankegang overføres til andre fag.

Referanseliste

Blank, N., Melhus, K. & Moe, G. I. (2014b). *Matematikk Grunnbok 1A*. Kirkenes: Barentsforlag.

Blank, N., Melhus, K. & Moe, G. I. (2016). *Matematikk Grunnbok 3B*. Kirkenes: Barentsforlag.

(fortsettes side 47)

Fyhn

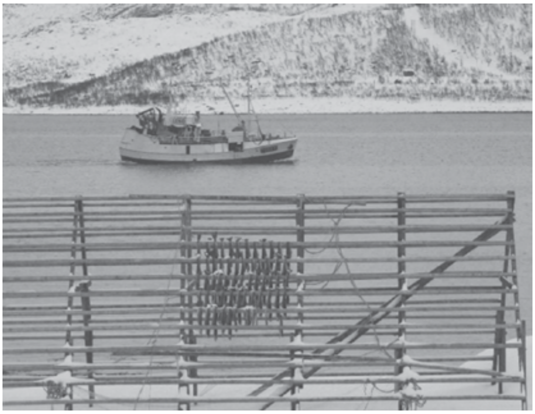
Utforsking av kystfiskekultur

Våren 2017 presenterte Kunnskapsdepartementet forslag til ny generell del av læreplanen (Kunnskapsdepartementet, KD, 2017a). Forslaget vektlegger elevenes lokale kulturarv:

> Kunnskap om historie, kultur og tradisjon og om samspillet mellom ulike strømninger og kulturtradisjoner styrker elevenes identitetsutvikling og kulturelle forståelse, og det skaper tilhørighet i samfunnet. I opplæringen skal elevene utvikle både felles kulturelle referanser, og respekt og toleranse for ulikhet. Innsikt i lokal-, nasjonal- og internasjonal kulturarv er av betydning for elevenes danning og identitetsutvikling. (s. 5)

Dette avsnittet var en utløsende faktor for prosjektet om Håkons fiskehesje. Kystfiske er en sentral del av den lokale kulturarven i Nord-Norge. Fisken i havet er en viktig årsak til at

Anne Birgitte Fyhn
UiT – Norges arktiske universitet
anne.fyhn@uit.no



Figur 1: Håkons fiskehesje. I bakgrunnen er en sjark på vei inn for å levere fisk på det lokale fiskebruket.

det bor folk langs kysten. For den uinnvidde omhandler kanskje nordnorsk kystfiske lite matematisk tenking bortsett fra kjøp og salg av fisk. Anne har hatt Håkons fiskehesje utenfor kjøkkenvinduet i noen år og har derfor studert mulighetene byggverket representerer for matematikkundervisning.

Hesja står på et svært vindutsatt sted, men den har ikke vært i nærheten av å blåse ned. Det er velkjent i mange kretser at trekantkonstruksjonen er stabil og solid: Snekkere og andre håndverkere bruker trekantkonstruksjoner eller skråstivere når de skal stive av noe[1], og innenfor tradisjonell samisk kultur har stabile trekantkonstruksjoner en sentral plass (Keskitalo, Fyhn & Nystad, i trykk). Ingeniører og arkitekter bruker trekantkonstruksjoner for å lage stabile byggverk med minst mulig materialer; heisekraner og master er eksempler på dette. Tradisjonell skolematematikk forholder seg til dette som «kongruente trekanter»: Når du har gitt lengden på sidene i en trekant, så har du nok informasjon til å konstruere den. Kongruens og formlikhet er sentrale egenskaper ved mange geometriske figurer. Fiskehesja har form som et trekantet prisme, og den er delt inn i moduler i lengderetningen. Det er samme avstand mellom hver sperre, eller sagt på et annet vis: Hver modul ser ut til å ha lik lengde. Innenfor skolematematikken gjenfinner vi moduler når vi regner i ulike tallsystem. Denne teksten søker å synliggjøre noe av mangfoldet i matematisk tenking som inngår i nordnorsk kystfisketradisjon generelt og i fiskeryrket spesielt.

Figur 2: Håkon og fiskehesja hans

Figur 3: Håkons båt

Studentene på Grunnskolelærerutdanning for 1.–7. trinn, master, med fordyping i matematikk, dro på dagsbesøk til sjarkfiskeren Håkon Robertsen i fiskeværet Tromvik, en liten times kjøretur fra UiT – Norges arktiske universitet i Tromsø. Hensikten var å gi studentene et grunnlag for å utvikle undersøkende matematikkundervisning med basis i nordnorsk kystfiskekultur. Både på forhånd og underveis ga studentene uttrykk for at de ikke hadde lært noe om nordnorsk kystfiske tidligere i lærerutdanningen. Ingen av dem hadde sett matematikkoppgaver der dette var kontekst. Før besøket hos Håkon ble studentene presentert for matematikkdidaktisk teori som prosjektet bygger på.

Teorigrunnlag

Math in a Cultural Context (MCC) er utviklet ved Universitetet i Alaska, Fairbanks. MCC-miljøet har over tid samarbeidet med eldre yup'iker[2] og erfarne yup'ik-lærere (Lipka, Andrew-Ihrke & Janez, 2013). MCC bidrar til praktisk matematikkundervisning i grunnskolen, undervisning som er forankret i en kulturell kontekst. MCC påpeker tre faktorer som er nødvendige for å utvikle matematikkundervisning i en kulturell kontekst. Kompetanse innenfor matematikkfaget og pedagogikk/matematikkdidaktikk er to faktorer. Dessuten er det en forutsetning å samarbeide tett med eldre yup'iker fordi de har solid kompetanse i den kulturelle konteksten. Den rutinerte sjarkfiskeren Håkon var vert for studentene, og han hadde en tilsvarende ekspertrolle med solid kompetanse innenfor temaet nordnorsk kystfiske. For å sikre at både utgangspunktet og premissene i studentenes arbeider er relevante for dagens virkelighet, deltar Håkon i kvalitetssikringen av studentenes valg av tema og innfallsvinkel.

Ifølge Skovsmose (2005) består en persons bakgrunn av personens familiemessige relasjoner og de tradisjoner som vedkommende er vokst opp med. En persons bakgrunn handler om oppvekst, familie og kamerater. Den handler om sosiale forhold, normer og verdier som man har vokst inn i. En bakgrunn er både individuell og kollektivt formidlet forståelse av en situasjon og en livshistorie. En forgrunn består av framtidsutsikter, framtiden og de muligheter som en person eller grupper av personer ser seg selv i under de gitte politiske, kulturelle, økonomiske omstendigheter. En ungdom som er vokst opp på en gård, må ikke nødvendigvis ønske seg å bli bonde i voksenlivet. Hennes eller hans forgrunn kan også bestå av arbeid som frisør eller ingeniørstudier på universitetet. Forgrunn og bakgrunn er ethvert individs egen opplevelse, det er ikke hvordan omgivelsene tolker situasjonen. De som har vokst opp med tilknytning til nordnorsk kystfisketradisjon, har fått høre jevnt og trutt at det ikke er noen framtid i fiskerinæringa, at det er viktig å se seg om etter annet arbeid. Skolen har bidratt med nedsnakking av nordnorsk kystkultur helt fra Grunnloven ble innført (Edvardsen, 1984/1996). Dette har bidratt til at flere generasjoner kystboere har bygd seg opp en forgrunn uten rom for kystfiske. Ungdom har forlatt fiskeriene til fordel for jobb i byene. En kulturelt forankret matematikkundervisning kan bidra til at elever får muligheter til å oppleve hvordan matematisk kompetanse er både relevant og nødvendig i fiskeryrket og i daglig virksomhet hos kystboere. Når læreplanforslaget understreker verdien av lokal kulturarv, så bidrar læreplanen til å oppgradere statusen til nordnorsk kystfisketradisjon.

Skovsmose (2001) introduserer et utvidet matematikkbegrep, som omfatter både matematiske ferdigheter og en kompetanse i å tolke og handle i sosiale og politiske sitasjoner som er strukturert ved hjelp av matematikk. Han introduserer begrepet undersøkelseslandskap som motsats til tradisjonelt arbeid med løsning av matematikkoppgaver. Videre klassifiserer han læringsmiljøer i seks kategorier, de seks første kategoriene i tabell 1. Fyhn mfl. (2015) videreutvikler dette ved å introdusere kategoriene (7) og (8).

	Oppgave-tradisjonen	Undersøkelses-landskap
Referanser til ren matematikk	(1)	(2)
Referanser til en «delvis» virkelighet	(3)	(4)
Referanser til den virkelige verden	(5)	(6)
Referanser til en kulturspesifikk kontekst	(7)	(8)

Tabell 1: Læringsmiljøer. Skovsmoses (2001) seks forskjellige kategorier, pluss to nye kategorier der oppgavene har referanse til en kulturell kontekst. Venstre kolonne representerer tradisjonelle oppgaver. Kolonnen til høyre representerer utforskende tilnærminger til matematikk.

Oppgaver av typen «Utforsk hvilke tall som forekommer ofte i gangetabellen», kan plasseres i kategori (2). Oppgaven «Håkons båt, Eistebåen, går sammen med båtene Rennebåen, Fidel og Hersøy på vei inn til bruket for å levere dagens fangst. Hvor mange ulike rekkefølger kan de fire båtene ha?» er en oppgave der det matematikkfaglige innholdet er en tradisjonell problemstilling. Derfor hører oppgaven hjemme i oppgavetradisjonen, kolonnen til venstre. Oppgaven refererer til en kulturspesifikk kontekst, derfor plasseres den i kategori (7). Oppgaven «Undersøk alternative priser for en helgetur til London» hører hjemme i kategori (6). Selv om denne oppgaven er relevant også for både nordnorske kystfiskere, så er ikke en helgetur til London spesifikk for lokal kystfiskekultur. Studentenes oppgave etter endt besøk hos Håkon var å skissere et undervisningsopplegg i kategori (8). Skovsmose poengterer at det ikke er noe mål at all undervisning skal være på formen undersøkelseslandskap, men snarere at dette blir et tilskudd til mer tradisjonelle undervisningsformer. For å kunne skissere et undervisningsopplegg i kategori (8) må læreren ha god kunnskap om den aktuelle kulturelle konteksten, som i dette tilfellet er nordnorsk kystfisketradisjon, eller samarbeide med noen med slik kunnskap.

Besøket hos Håkon

Håkon viste fram fiskehesja si og fortalte hvordan den blir brukt. Det dukka opp mange nye ord for både Anne og studentene. Først fikk vi vite at Håkon har ei fiskehesje og ikke en hjell. På en hjell henger fisken i samme høyde over bakken, mens på ei hesje henger fisken i forskjellige høyder. Deretter viste Håkon fram flere typer garn med ulik maskevidde; han bruker for eksempel forskjellige typer garn til blåkveite og torsk. Studentene fikk se og lukte på saltfisk og tørrfisk. Håkon fortalte hvordan man kan vurdere kvaliteten på fisk ut fra lukt, farge og konsistens. Lunsjen ble inntatt inne på bua til Håkon. Der hadde han innredet med gamle fiskeredskaper på veggen, og på ei hylle over kaffemaskina sto en gammel radio og en gammel mobiltelefon. Studentene spurte og grov og fikk svar. Det viste seg at fiskeres ord og faguttrykk var ukjent for studentene, så derfor fikk de ikke med seg innholdet i alt Håkon sa. Flere av studentene sa at de hadde behov for ei skikkelig ordliste.

Etter lunsj dro vi om bord i sjarken til Håkon. Den lå i båthavna sammen med en rekke andre sjarker som er hjemmehørende i Tromvik. Håkon viste studentene rundt på båten. Noen ble veldig opptatt av navigasjonsutstyret, mens andre var mer opptatt av det som befant seg ute på dekk og under dekk. Det var mange forskjellige plastblærer om bord – studentene visste stort sett ikke andre navn på disse enn *blåser*. Håkon fortalte hva sakene het, og hva de ble brukt til. Han tok ned ei lang stang med to flagg i enden. «Dette er en vesterende.»

Figur 4: Håkon viser fram en *vesterende*

Håkon forklarte at når du setter bruk i havet, så setter du to flagg i vesterenden og ett flagg i austerenden. Slik er det lett å se for eksempel hvilken retning ei garnlenke har ut fra antall flagg på stanga. Dagen ble avslutta med en rask omvisning på det lokale fiskebruket der 30 sjarker leverer sin daglige fangst.

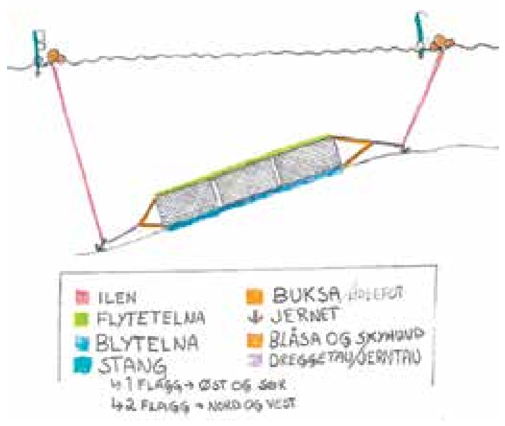
Studentenes etterarbeid

Etter turen skrev studentene individuelle essayer om matematiske kompetanser. De skulle skissere et utforskende undervisningsopplegg som er forankret i matematikkdidaktisk litteratur. Oppleggene skulle være i tråd med kompetansemål i matematikk for et selvvalgt klassetrinn i barneskolen. I tillegg skulle oppleggene ta utgangspunkt i lokal nordnorsk kulturarv og være relevante for nordnorsk fiskeritradisjon.

Håkon var ekspert på området nordnorsk fiskeritradisjon, og han påtok seg å vurdere oppleggenes relevans for området. Da studentene hadde levert inn skisser til oppleggene sine, gikk Anne gjennom skissene i lag med Håkon. Ei skisse handlet om at elever skulle selge fiskesuppe for å tjene penger til klassetur. Elevene skulle først foreta en undersøkelse blant foreldrene for å finne ut hvilke smaker som ville selge best. Håkon syntes dette var en dårlig idé. Hvis elevene skulle tjene penger til klassetur, burde de heller selge kakebokser. Han føyde til at det ville være vanskelig å gjøre god butikk på å selge fiskesuppe. Anne formidlet Håkons respons, og det viste seg at opplegget var henta fra ei bok. Håkons tilbakemelding medførte at studenten skiftet fokus og endte opp med et relevant essay.

Flere essayer inneholdt oppgaver som ikke var åpne til å begynne med; oppgavene startet i kategori (7) i figur 4 og utviklet seg til kategori (8). En tekst handlet om Håkons fiskehesje, der ett av seks lukkede spørsmål lød: «En pinne på fiskehesjen har plass til 5 torsk eller 7 sei. En dag hang Håkon opp 65 fisk på hesjen. Hvor mange fisk av hver type henger til tørk? Finnes det flere løsninger?» Etter hvert utviklet studenten oppgaven, og til slutt var ordlyden: «Hvor mye fisk kan det henge på hesjen til Håkon?» Studenten unngikk med vilje å spørre hvor mange fordi spørsmålet da kunne oppfattes som at løsningen var et bestemt antall. Studenten skisserte flere mulige løsninger som innebar økonomi, måling av lengde og/eller vekt og antall fisk. For å løse oppgaven må elevene selv undersøke hvor mye vekt hesja tåler, og hvor tett fisken kan henge. Ifølge Håkon var alle innleverte essayer relevante. Han hadde bare godord å si om studentenes valg av fokus og tema. Essayene skisserte mulige løsninger og knyttet dem til kompetansemål i læreplanen og til Niss og Højgaard Jenssens (2002) modell for matematiske kompetanser.

De fleste essayene starter med at elevene på et gitt klassetrinn besøker Håkon eller en annen fisker, eller de drar på tur med en fiskebåt. Essayene hadde store innslag av problembehandling og matematiske representasjoner og svært lite fokus på bruk av rene matematiske ferdigheter. Av plasshensyn velger jeg å gå nærmere inn på Henriette Elise T. Hansens essay i stedet for å omtale alle essayene overflatisk. Håkons kommentar til hennes essay var: «Her er det en som har satt seg grundig inn i tingene.» Han fikk da vite at studenten hadde kompetanse på området fra før. Henriette er vokst opp i ei nordnorsk kystbygd, og hun kjenner den kulturelle konteksten bedre enn de fleste medstudentene. Essayet hennes handler om *bruket* til fiskeren. *Bruket* er et samlebegrep for alle



Figur 5: *Bruket* til fiskeren består av fiskegarnet og tilhørende deler. (Tegning: Henriette Elise T. Hansen)

delene på figur 6. Poenget med garnfiske er at fisken setter seg fast i garnet. Når fiskeren tar garnet opp, følger fisken med. Henriette skriver innledningsvis:

Det er ikke alle delene som er navngitt i denne illustrasjonen, og de ulike delene i *bruket* har ofte lokale navn. Et eksempel er *jernet*, som også kalles et *garnanker* eller en *grabb*. Noen fiskere bruker en stein som tyngde, da kalles den *ilestein*. På bildet er det tegnet flere garn etter hverandre, og det kalles en *lenke*.

Undervisningsopplegget går ut på at elever på fjerde klassetrinn skal få delta i fiskerens forberedelser før han går ut på havet. Elevene får en oppgave der de mangler nødvendig informasjonen for å svare på spørsmålet. For å besvare oppgaven må de gå inn i undersøkelseslandskapet, og derfor er oppgaven kategorisert som (8) i figur 4. Oppgaven lyder: *Hvor lang må ilen være?* Henriette forklarer:

Fiskeren må vite hvor lang *ilen* må være før han kan sette *bruket* i havet. *Ilen* er det tauet som er markert rødt på illustrasjonen [figur 6], og det går fra *blåsa/skyhund* og ned til *jernet*. Lengden på *ilen* blir bestemt av dybden på havet der garnet skal settes, og det er praktisk å bruke favn som måleenhet, da det ville bli veldig upraktisk å måle tauet med måleband eller tommestokk. Men dette er noe elevene skal oppdage selv gjennom sine undersøkelser.

Når fiskeren skal beregne lengden på *ilen*, må han også ta hensyn til strømmen i havet på det stedet garnet skal settes. Derfor vil *ilen* være lengre enn dybden i havet, noen ganger dobbelt så lang. Fordi havbunnen ikke nødvendigvis er flat, kan det være at *ilen* må være kortere i den ene enden. Ved at elevene får i oppdrag å finne ut hvor lang *ilen* må være, spiller læreren initiativet over til elevene. Elevene trenger ikke kunne annen matematikk på forhånd enn at de kan telle til 200–300. Det innebærer at oppgaven inviterer alle elevene til å være med fordi terskelen for å delta er lav.

Sluttord

Da Håkon ble forelagt de tolv essayene, nikket han og smilte og kom med tilføyelser. Han trakk fram ytterligere eksempler på at matematikk er viktig for kystfiskere, for eksempel er kvoteordninga alene et eksempel på innfløkt matematikk. Flere ganger oppfordret Håkon Anne til å se på tallmaterialet som ligger på Råfisklagets hjemmesider. En oppsummering av prosjektet viser at utforsking av nordnorsk kystfiskekultur bør være velegnet som utgangspunkt for arbeid med utvikling av elevers matematiske kompetanse. Utforsking av nordnorsk kystfiskekultur er forankret i forslaget til ny generell del av læreplanen. Etter at studentene hadde vært på besøk hos Håkon, ble det nye læreplanforslaget ferdig behandlet. Det viste seg at den endelig vedtatte versjonen av generell del av læreplanen (KD, 2017b) dessverre har fjernet setningen om lokal kulturarv.

Note

1 https://www.byggern.no/tips-og-rad/gjor-det-selv/inspirasjon-for-store-og-sma-snekkere/

2 Yup'ik-folket er en av Alaskas urbefolkninger.

Referanser

Edvardsen, E. (1996). *Den gjenstridige almue. Skole og levebrød i et nordnorsk kystsamfunn ca. 1850–1900*. Oslo: Solum forlag.

Fyhn, A., B., Nutti, Y. J., Eira, E. J. S., Børresen, T., Sandvik, S.O. & Hætta, O. E. (2015). Ruvden as a basis for the teaching of mathematics: A Sámi mathematics teacher's experiences. I E. S. Huaman & B. Sriraman (red.), *Indigenous universalities and peculiarities of innovation. Advances in innovation education* (s. 169–186). Rotterdam: Sense Publishers.

Keskitalo, J. H., Fyhn, A. B. & Nystad, K. (i trykk). Sámi cultural properties of the numbers three and four. To appear in *Journal of Mathematics and culture, Special Issue: Proceedings of IndigMEC- Indigenous Mathematics Education Conference.*

Kunnskapsdepartementet, KD (2017a). *Overordnet del – verdier og prinsipper. Høringsutkast fra Kunnskapsdepartementet 10.03.17.* Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/ac9720408d464a83a7926f33dbcb7616/horing-sutkast-fra-kunnskapsdepartementet-10.03.17--overordnet-del---verdier-og-prinsipper.pdf

Kunnskapsdepartementet, KD (2017b). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen.* Hentet fra https://www.regjeringen.no/content assets/53d21ea2bc3a4202b86b83cfe82da93e/overordnet-del---verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen.pdf

Lipka, J., Andrew-Ihrke, D. & Janez, E. E. (2013). Yup'ik-folkets verdensforståelse og skolens matematikk. I A. B. Fyhn (red.), *Kultur og matematikk/Kultuvra ja matematihkka* (s. 11–22). Bergen: Caspar forlag.

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspirasjon til udvikling af matematikundervisning i Danmark.* København: Undervisningsministeriet. Hentet fra http://www.matematikksenteret.no/attachment.ap?id=3416

Skovsmose, O. (2005). Foregrounds and politics of learning obstacles. *For the Learning of Mathematics, 25*(1), 4–10.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *ZDM – The International Journal of Mathematics Education, 33*(4), 123–132.

Berrefjord, Haugland, Nilssen, Herheim

Fysioterapi og matematikk

Iskalde vindkast møter oss fredag morgen 20. november. Vi står utenfor Høgskulen på Vestlandet, campus Bergen, og er klare for å møte Bård Bogen. Kulden biter seg fast i kroppen, og det er en lettelse å komme inn i det store, varme bygget.

Vi blir møtt av en entusiastisk og smilende mann. Før vi begynner intervjuet, geleider Bård oss inn i bygget og viser fram arbeidsplassen sin. Når vi kommer inn, får vi inntrykk av at det er en ny og moderne skole. Bård forklarer at skolen var tidligere brukt som togverksted, og at deler av den gamle fabrikken er bygget inn i den nye skolen. De høye murveggene og rester av togskinner har tilhørt det gamle togverkstedet. Så blir vi tatt med til rehabiliteringslaben. Der er det mye forskjellig treningsutstyr og treningsapparater, men først og fremst utstyr for å måle og undersøke bevegelser.

Bård jobber som fysioterapeut, en jobb mange kanskje tror går ut på å massere slitne folk. Dette stemmer ikke helt med virkeligheten ettersom Bård ytterst sjelden behandler folk på den måten. Han jobber også som forsker innenfor fysioterapi der han kan finne ut om du har god helse ved å undersøke gangarten din.

Hva fikk deg til å velge yrket?

Det var ganske tilfeldig. Jeg studerte først administrasjons- og organisasjonsvitenskap på universitetet, men var usikker på om det var riktig retning for meg. Så jobbet jeg som pleiemedhjelper i psykiatrien en stund, før jeg til slutt endte opp som fysioterapistudent. Jeg hadde veldig lyst til å bli forsker og begynte å jobbe som forskningsassistent i et prosjekt om balansetrening hos eldre. Nå holder jeg på med et doktorgradsprosjekt om hvordan eldre mennesker går, hvor jeg bruker sensorer til å måle bevegelsene under gange. Hovedjobben min i dag er å være underviser og forsker her på fysioterapeututdanningen.

Hvordan ser en vanlig arbeidsdag ut?

Det at dagene er så ulike, er noe av det som er gøy med min jobb. Noen dager har jeg undervis-

Ole Berrefjord
Kristina Mowatt Storm Haugland
Amalie Nilssen
10. klasse Rothaugen skole, Bergen

Rune Herheim
Høgskulen på Vestlandet
rune.herheim@hvl.no

ning for studentene, andre dager gjør jeg undersøkelser her på laben. Enkelte dager bruker jeg til å skrive på artikler, til å regne på forskningsresultater eller til å reise på møter eller konferanser. Jeg trives godt med at det er stor variasjon i arbeidsoppgavene.

Du forsker på gangart. Kan du fortelle litt om det?

Grunnen til at jeg synes gangart er viktig, er at det å gå er noe vi egentlig ikke tenker over. Det å kunne gå er veldig grunnleggende, det gir oss frihet og uavhengighet til å gjøre det vi vil og trenger. Samtidig er det å gå en ganske komplisert aktivitet som krever mye av oss. Ulike kroppssystemer som musklene, hjernen, sansene, hjertet og lungene er alle involverte når vi går. Når eldre mennesker begynner å få dårligere helse og kroppsorganer som ikke fungerer på topp lenger, kan vi ofte se det på gangmønsteret. Derfor synes jeg det er viktig å forske på hvordan eldre mennesker går.

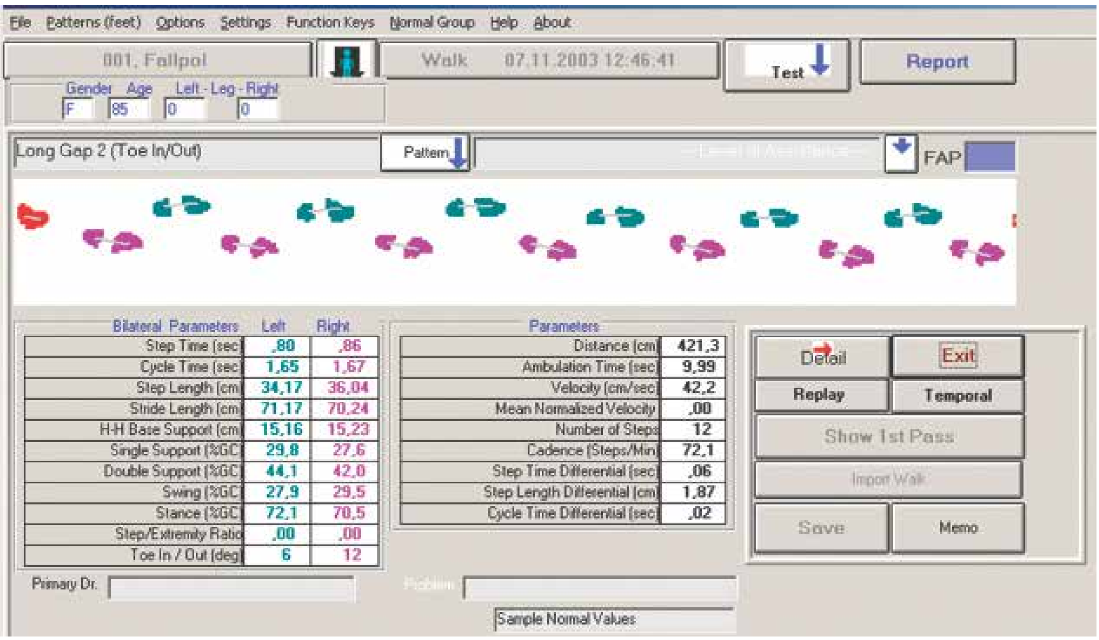
I første omgang er fokuset mitt nå å identifisere det som er spesielt med gangen til eldre. I neste omgang vil det være naturlig å forske på hva som kan gjøre gangfunksjonen bedre, for eksempel øvelser eller trening, fordi det er viktig for eldre å beholde sin gå-funksjon så lenge som mulig.

Fotavtrykksanalyse med gangmatte

Et av verktøyene Bård bruker, er en elektronisk gangmatte på fem meter. I matten er det tett med sensorer som registrerer fotavtrykkene digitalt (se bilde 1), og da får man mye informasjon om personers gangmønster (se tabellen på bilde 2).

For eksempel får Bård vite hvor fort personen har gått (Velocity), hvor lange steg som blir tatt

Bilde 1: Person går på Gaitrite-matte, www.gaitrite.com



Bilde 2: Informasjon om en persons gangmønster

(Step length), hvor lang tid man bruker på ett steg (Step time), og hvilken frekvens det er på stegene, altså antall steg per minutt (Cadence). Personen i dette eksempelet har gått med en hastighet på 42,2 cm/sek, som Bård sier er ganske sakte. Kadensen er 72,1 steg/min, steglengden er på rundt 34–36 cm, og personen har brukt rundt 0,8 sekunder på hvert steg. Allerede basert på dette kan Bård anta at resultatene er fra en eldre person med nokså dårlig gå-funksjon, siden hastigheten er lavere og steglengden kortere enn hos en gjennomsnitts-person.

Når man går, har man ett ben i bakken og ett i luften og er på vei fremover det meste av tiden. Her bruker personen en større del av steget, 44,1 %, med begge bena i bakken («Double Support») enn med ett ben i bakken, 29,8 % («Single Support»). Det tyder på dårlig balanse. I tillegg kunne Bård sett om det var systematiske forskjeller mellom høyre og venstre ben, for det kunne tydet på halting. Andre ting han ser på med tanke på balanse, er stegbredden (H-H Base Support). Hos denne personen er den på cirka 15 cm. Når stegbredden blir så stor, er det som regel fordi personen føler seg ustø under gange. Ved å gå mer bredbent kan man føle seg stødigere, forklarer Bård.

Noen ganger går eldre mennesker litt rykkete og urytmisk. Dette kalles gangvariabilitet, sier Bård. Dette kan regnes på ved å se på hvor stor forskjell det er mellom stegene. Da trengs verdier for hvert steg, for eksempel stegtiden (Step time). Da kan standardavviket regnes ut for alle stegene (se tekstboksen neste side). Hos personen i eksempelet er gjennomsnittet for venstre ben 0,8

Bilde 3: Ole får testet beinstyrken

sekunder og høyre ben 0,86 sekunder, men stegtiden er ikke lik for alle stegene. Dermed regner Bård rett og slett ut hvor langt unna gjennomsnittet hvert steg er, og slår det sammen, se tabell 1. Da får han en mulighet til å tallfeste hvor ustø personen er.

Avslutning

Som fysioterapeut kan man jobbe med mye forskjellig, og Bård virker godt fornøyd med sin jobb med å forske på gange og bevegelse. Det er mange måter man kan forske på dette på, men i Bårds hverdag virker matematikk som en viktig del av det å finne ut hvordan folk beveger seg.

Avslutningsvis må vi kommentere at vi ser rett bort på Brann Stadion, og Bård kan fortelle at Brann-spillere har vært på rehabiliteringslaben for å teste styrken sin iblant, for eksempel i forbindelse med opptrening etter skade. Ole får prøve styrketestingsapparatet (se bilde 3), og han kan skrive under på at det er ganske tungt å bli testet!

Steg-nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Gjennom-snitt	Standard-avvik
Venstre stegtid	0,8		0,79		0,8		0,83		0,88		0,82	0,033
Høyre stegtid		0,86		0,82		0,81		0,81		0,77	0,81	0,029

Tabell 1: Utregning av gangvariabilitet, med venstre og høyre stegtid i sekunder

Elevene Kristina, Amalie og Ole har dokumentert hvordan en fysioterapeut bruker matematikk man finner igjen i flere av kompetansemålene i matematikk. Det gjelder mellom annet innenfor hovedtemaet Måling, det å være fortrolig med måleenheter og mindre brukte varianter av enheter som centimeter per sekund (cm/sek) og steg per minutt (steg/min). Et fokus på bruk og omgjøring mellom enheter er relevant siden det er noe elever har utfordringer med, jamfør f.eks. veiledningen til lærere for nasjonal prøve i regning 2016. I tillegg kan det å ha fleksibel kunnskap om enheter hjelpe med å forstå matematiske sammenhenger. Hvis du for eksempel ikke husker formelen for vei, fart og tid, kan du bruke at hastighet er km/t, og da vet du at formelen for hastighet er strekning delt på tid: v=s/t.

Å forstå det å angi del av helhet i prosent brukes når fysioterapeuten skal få innsikt i balansen ved å vurdere hvor stor del av steget som blir gjort med begge bena i bakken. Elevene får erfaring med situasjoner der prosent er en formålstjenlig representasjon, og det er vektlagt i kompetansemålene for Tall og algebra.

Det handler også om statistikk med tema som å ordne og gruppere data, finne og drøfte gjennomsnitt og få innsikt i frekvensbegrepet og statistisk behandling av tallmaterialer. Varians og standardavvik er pensum på noen videregående fag og slik sett utenfor disse elevenes pensum. Men for å finne varians og standardavvik må man først finne gjennomsnitt, og gjennomsnitt er pensum på ungdomsskolen. Variansen finner man ved å kvadrere (for at positive og negative tall ikke skal oppheve hverandre) avstanden fra gjennomsnittet, summere disse og dele på antall målinger. Standardavvik finner man ved å ta kvadratroten av variansen, og standardavviket sier noe om hvor langt de enkelte verdiene ligger fra gjennomsnittsverdien. Nederst på denne siden vises utregningen av standardavviket for å finne gangvariabiliteten for venstre fot i eksempelet.

Varians og standardavvik blir brukt av nesten alle forskere som driver med kvantitativ forsking til å måle spredning og til å vurdere svarenes gyldighet. Men her har vi altså et eksempel på at standardavviket i seg selv, selve tallverdien som angir størrelsen på standardavviket, forteller fysioterapeuten i hvilken grad en person har ustø gange.

Litteraturtips

Hvis du er interessert i å lese om et konkret undervisningseksempel om skrittlengde, kan vi anbefale artikkelen «Vi tok skrittet heilt til topps!». Den stod i Tangenten nr. 3 i 2015 og presenterer lærer og sjetteklassinger ved Haus skule sine perspektiver knyttet til deres undersøkelser av skrittlengde. For dette arbeidet vant de forskningskonkurransen «Årets Nysgjerrigper» i 2015.

Først finner man gjennomsnitt: $\bar{x} = \frac{0{,}8+0{,}79+0{,}8+0{,}83+0{,}88}{5} = \frac{4{,}1}{5} = 0{,}82$

Så finner man variansen:

$$\frac{(x-\bar{x})^2}{5} = \frac{(0{,}8-0{,}82)^2+(0{,}79-0{,}82)^2+(0{,}8-0{,}82)^2+(0{,}83-0{,}82)^2+(0{,}88-0{,}82)^2}{5} = 0{,}0011$$

Standardavviket blir da: $\sqrt{0{,}0011} = 0{,}033$

Kaufmann, Olafsen

Intervju med lærere

Overgangen fra lærerutdanning til læreryrket kan være en utfordring for mange. Årsakene er mange og sammensatte, men flere synes at de ikke er godt nok forberedt, og at de mangler kjennskap til flere arbeidsområder som for eksempel oppgaver som er tillagt en kontaktlærer. Et begrep som ofte brukes for å beskrive denne overgangen, er «praksissjokket». Det vil si at utdanningen klarer ikke i tilstrekkelig grad å forberede studenten på yrket som venter. Vi har derfor valgt å intervjue to nyutdannede lærere for å finne ut hvilke erfaringer de har som matematikklærere, og hvilke erfaringer de har gjort seg i overgangen til læreryrket.

Eirin Aspenes Wold tok sin utdanning ved Høgskolen i Østfold, nærmere bestemt grunnskolelærerutdanning 1.–7. Hun tok fordypning i matematikk, 30 studiepoeng, i tillegg til de obligatoriske 30 studiepoengene med matematikk som inngår i grunnskolelærerutdanning 1.–7. Eirin var ferdig med sine fire år på lærerutdanningen våren 2016. Høsten 2016 begynte hun i

Odd Tore Kaufmann
Høgskolen i Østfold
odd.t.kaufmann@hiof.no

Audun Rojahn Olafsen
Høgskolen i Østfold
audun.r.olafsen@hiof.no

Eirin Aspenes Wold

Helene Eireen Taasaasen Korsvold

fast stilling ved Prestebakke skole i Halden. Det første året var hun lærer på 7. trinn, mens hun dette året er lærer på 1. trinn.

Helene Eireen Taasaasen Korsvold har en variert studiebakgrunn. Hun har blant annet 15 studiepoeng matematikk fra Høgskolen i Oslo, 7,5 studiepoeng matematikk for økonomer fra Høgskolen i Buskerud og 45 studiepoeng matematikk fra Høgskolen i Telemark. Hun har bachelor med fordypning i engelsk og var ferdig våren 2015 med praktisk pedagogisk utdanning ved Høgskolen i Østfold. Helene hadde et kort vikariat som matematikklærer på 10. trinn etter endt utdanning og fikk deretter et års vikariat på 5. trinn på Halmstad barneskole i Rygge. Her fikk hun fast stilling som kontaktlærer og fagansvarlig i matematikk året etter. I tillegg er Helene medforfatter for et helt nytt læreverk i matematikk for 1.–7. trinn som Fagbokforlaget har planer om å utgi i forbindelse med ny læreplan.

Vi har stilt dem følgende spørsmål:

Hva ser du på som god matematikkundervisning?

Eirin: Det er å skape trygghet for elevene. At man ikke går for fort fram, og at man tar seg tid til å repetere. At lærere klarer å knytte matematikken i alle fag, og at man har fokus på at matematikk er overalt og i hverdagen, slik at vi har noen praktiske eksempler å knytte matematikken til. Det er også viktig å motivere for matematikk og ha det gøy – å kunne trekke inn lek og aktiviteter slik at matematikken blir lystbetont for elevene. Jeg må også gå foran som en god rollemodell ved at jeg selv er trygg og viser elevene at jeg synes matematikk er gøy.

Helene: Jeg synes at god matematikkundervisning er når elevene får nok tid til å dvele ved problemstillinger, og at det er rom for ulike måter å løse oppgavene på. God undervisning har fokus på prosessen og ikke bare resultatet. Oppgavene må være lagt opp slik at elevene må tenke, og jeg har ikke sansen for at eleven skal arbeide med mange like oppgaver på rad. Da kan elevene få rette svar med bare delvis forståelse og ved å lage strategier de ikke kan bruke i nye situasjoner. Jeg har merket en utbredt misforståelse blant elevene om at det viktigste med matematikktimene er mange og riktige svar. Det er det jo ikke!

Hva kan du tenke deg å prøve ut?

Eirin: Jeg ønsker å ha mer fokus på det digitale og å bruke digitale hjelpemidler i større utstrekning. En av årsakene til det er at elevene er motiverte og konsentrerte når de bruker for eksempel iPad. Det er også en ressurs elevene vil møte i framtiden, og om ikke det er iPad, så vil det være andre digitale hjelpemidler. Ved bruk av iPad er det ønskelig å ha et godt digitalt læreverk. Slik situasjonen er nå, er man også avhengig av flere gode apper og nettsider, så det er en utfordring for meg også å holde meg oppdatert.

Helene: Jeg er veldig spent på den nye læreplanen. Hvis det virkelig blir mer dybde og mindre omfang, er dette noe jeg ser frem til å prøve ut! Det blir tilfredsstillende å kunne jobbe med færre emner hvert semester og gi elevene mer tid til å få en grundig forståelse.

Hva kan du fortelle om positive erfaringer med matematikkundervisning?

Eirin: Jeg har god erfaring med stasjonsundervisning. Elevene får da brukt mer konkreter. Elevene jobber i mindre grupper der for eksempel den matematiske samtalen står i sentrum. Da er også elevene mer konsentrerte når de arbeider, siden de har 10–15 minutter på en post før de skal over på ny post. Elevene er dermed mer engasjerte.

Helene: Jeg synes det er veldig gøy når elevene får egne aha-opplevelser. Jeg er bevisst veldig sparsom med å utlevere ferdige regler i min undervisning. Isteden forklarer jeg igjen og igjen hvorfor ting er som de er, og målet er at elevene skal oppdage sammenhenger selv. Ta utvidelse av brøk for eksempel. Vi tegner, og vi tegner, vi deler opp rektangler, lager kakestykker – og så plutselig går det opp et lys: ”Men jeg kan jo bare gange med det samme tallet oppe og nede!" En selvoppdaget regel glemmer man ikke så lett. Sånne øyeblikk gjør at jeg elsker jobben min!

Hva kan være spennende med å undervise i matematikk?

Eirin: Jeg synes det er veldig interessant å høre hvordan elevene resonnerer i matematikk, at elevene kommer fram til svaret på så mange forskjellige måter. Det krever også mer av meg, siden jeg må sette meg inn i elevenes måter å tenke på og vise ulike måter som de kommer fram til svaret på. Det er viktig at elevene tar i bruk sine strategier, og at vi bygger videre på dem. Det som er ekstra spennende, er når elevene tar i bruk strategier som ikke jeg har tenkt på.

Helene: Den enkelte elevs utvikling over tid synes jeg er mest spennende. Det blir så synlig når man jobber med matematikk. Jeg har ofte små stikkprøver i matematikktimene og bruker det som en vurdering av min undervisning. Jeg blir nerdete og lager statistikker for seg selv og synes det er gøy å se utviklingen til hver enkelt elev og klassen som helhet. Så kan jeg tilpasse hvordan jeg legger frem stoffet, og igjen se om det funker.

Hva kan være utfordrende med å undervise i matematikk?

Eirin: Jeg synes det er utfordrende å møte spriket i forkunnskapene til elevene i første klasse. Noen kan telle ti om gangen, mens andre knapt kan telle til fem. Da er det en utfordring å drive tilrettelagt undervisning for alle elevene. Som følge av det er det en utfordring å gi de elevene som er ekstra flinke, de utfordringene de trenger.

Helene: Det må være den berømte TPO. Det er veldig utfordrende å lage god undervisning som favner alle. Elevene har så ulike forutsetninger og måter å lære på. Man må være fleksibel og tørre og bevege seg utenfor læreboka. Det er også en kunst å følge opp hver enkelt elev på en god måte i timene. Der er det mange behov som må ivaretas på en gang!

Hva kan du tenke deg å lese om i Tangenten?

Eirin: Jeg kjenner ikke til Tangenten, så jeg er ikke sikker på om det jeg etterspør, finnes allerede. Men i et slikt tidsskrift kunne jeg tenke meg praktiske tips. Halden kommune har i år startet med et IKT-løft der blant annet alle førsteklassinger har hver sin iPad. Så det kunne være interessant å få tips om for eksempel gode hjemmesider eller apper som kan brukes i klasserommet, og steder hvor man kan hente undervisningsmateriell.

Helene: Jeg abonnerer foreløpig ikke på Tangenten, men om jeg gjorde det, ville jeg like praktiske eksempler på gode undervisningsopplegg, at lærere presenterer ting de har gjort, som har vært vellykket i klasserommet. Jeg har inntrykk av at det er en litt dårlig delingskultur i grunnskolen, og at det i liten grad finnes gode, interne rutiner for erfaringsutveksling på skolene.

Hvordan synes du overgangen fra lærerutdanning til læreryrket har vært?

Eirin: Jeg synes overgangen til læreryrket var ganske tøft. Det er ikke bare elevene man skal ta hensyn til, men du har en kollegagruppe og en foreldregruppe. Det er mye rundt dette som tar en del energi, og det tar litt tid å sette seg inn i alt som skjer på skolen. Jeg skulle gjerne hatt litt mer praksis i lærerutdanningen. Det blir for få sammenhengende praksisuker. For eksempel vil ikke elever oppsøke meg som student for å få hjelp med ting som har skjedd i friminuttet, de vil oppsøke læreren sin.

Helene: Jeg fikk en mykere overgang enn mange andre fordi jeg startet i deltidsstilling. Når man er ny, tar alt så mye mer tid. De hadde også et tolærersystem på den skolen, som gjorde at jeg fikk jobbe tett på en kjempedyktig lærer med lang erfaring. På toppen av det hele var læreren veldig oppmuntrende og åpen for at jeg kunne prøve ut nye ting. Slik burde alle hatt det!

Jeg synes det er uforsvarlig å sette en nyutdannet lærer rett i en 100 % stilling med kontaktlæreransvar alene. Det er vel en grunn til at så mange faller fra?

Hva tenker du er det viktigste du har tatt med deg fra lærerutdanningen som har vært til hjelp for deg som matematikklærer?

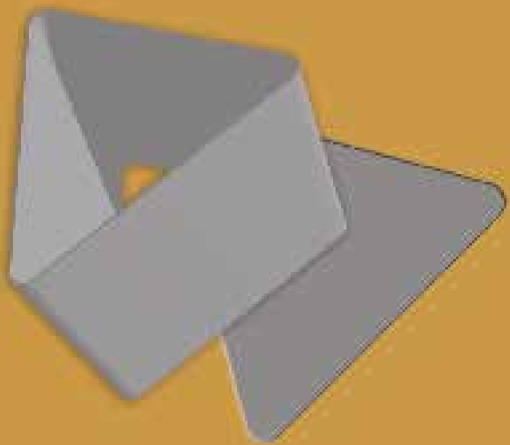
Eirin: Jeg synes at det har vært fint å ta med seg at alle elever har forutsetninger til å klare noe så lenge det blir godt nok tilrettelagt. Det er viktig at vi som lærere skaper den motivasjonen og tryggheten hos elevene. Videre synes jeg at studentene i de første 30 studiepoengene med matematikk på grunnskolelærerutdanningen fikk mye tips og ideer som vi kunne ta med oss ut i skolen.

Helene: Jeg tok utdanningen min over lang tid, så det er vanskelig å peke på én ting som det viktigste. Men for å nevne noe synes jeg det var veldig nyttig å få kjennskap til diagnostisk undervisning. Gjennom det har jeg lært meg å lage oppgaver som virkelig øver den kompetansen jeg ønsker, og som eventuelt avslører om noe er misforstått. En annen ting var en metode læreren min i didaktikk brukte, nemlig å starte timen ved å gi elevene en utfordring å bryne seg på uten å forklare først. Etter hvert tar man opp forslag til løsninger i plenum, og til slutt gjennomgår man det nye stoffet på tavla. Den omvendte rekkefølgen skaper ofte en nysgjerrighet som ellers ikke ville vært der, og da følger elevene bedre med. Det har jeg brukt mye.

Er det noe du savner fra matematikken du hadde på lærerutdanningen, som burde vært vektlagt bedre for å forberede deg som matematikklærer i skolen?

Eirin: Jeg skulle ønske meg mer tips og ideer fra de neste 30 studiepoengene i matematikk som passer til en undervisningstime eller deler av undervisningstime, og som ikke krever så veldig mye. Det kan for eksempel være lek og aktiviteter med kortere varighet som kan brukes i deler av timen. Videre kunne jeg tenke meg at vi i de neste 30 studiepoengene hadde enda mer fokus på didaktikk enn den matematikken som hører til pensum for videregående skole.

Helene: Man kunne gjerne hatt litt fokus på lærergjerningen som helhet – hvordan hverdagen faktisk er. Det er så mange uforutsette og ikke-faglige problemstillinger som dukker opp. Noen får kanskje dette i praksisen, men det er vel ulikt hvordan øvingslærere legger opp.



Naylor

Dyr som blir uvenner

Tør du å gi barna matematiske problemløsningsoppgaver som er utfordrende nok? (Kanskje også utfordrende nok for deg?)

Små barn er i stand til å tenke dypt og lenge og kan holde ut mye lenger enn du tror når det blir tilrettelagt for dem. De oppdager og kommer med forslag til kreative løsninger. Gerd Åsta Bones er matematikkdidaktiker og leder av Matematikkbølgen, et kreativitets- og kompetansesenter for matematikklæring. Hun hevder at små barn er i stand til å løse kompliserte problemer. Hun har gjennomført flere problemløsningssesjoner med barnehagebarn som viser at ingen er for ung for å tenke som en matematiker.

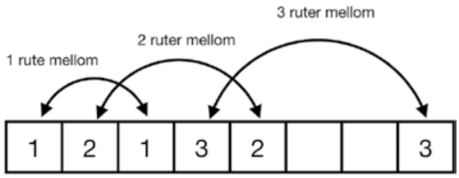
Her er en oppgave du kan bruke både med voksne og barnehagebarn: «Dyrene som ble uvenner»:

Vi har 8 dyr: 2 griser, 2 kyr, 2 hester og 2 sauer. Dyrene må plasseres ved siden av hverandre i 8 ruter slik at

Mike Naylor
Matematikkbølgen
mike@matematikkbolgen.com

- mellom grisene er det ett dyr
- mellom kuene er det to dyr
- mellom hestene er det tre dyr
- mellom sauene er det fire dyr

Før du leser videre for å se hvordan barnehagebarn løser oppgaven, inviterer jeg deg til å prøve oppgaven selv. Tegn en rad med 8 ruter og bruk plastdyr, tellebrikker, eller bare skriv 2 enere, 2 toere osv. slik at antall ruter mellom hvert par er 1, 2, 3 og 4. Figur 1 viser starten av en løsning som ikke fungerer (som du ser kan firerne ikke plasseres slik at det blir 4 ruter mellom).

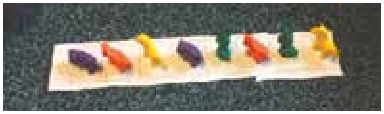


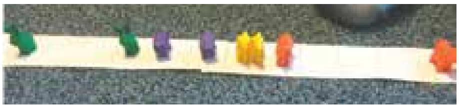
Figur 1: En løsning som ikke fungerer

Oppgaven med barnehagebarn

Start med å legge frem utstyret – strips med ruter og plast dyr, fargede tellebrikker eller lignende som kan fungere som dyr. Fortell barna at du har en spennende og utfordrende oppgave som de skal få sjansen til å løse, og at du skal gi dem noen regler for hvordan dyrene skal plasseres. Si til barna at før du skal gi dem din oppgave, skal de få stripser med 8 ruter og utstyr og selv bestemme reglene for hvordan de vil plassere dyrene. La deretter ett og ett av barna vise for hele gruppen hva de har gjort med sine dyr. Be barna forklare og sette ord på hvordan de har plassert dyrene i forhold til hverandre. Kanskje barna vil sette opp dyrene 2 og 2 i hver rute, lage et symmetrisk mønster eller sette hvert par med 3 ruter mellom. Hva hvis et barn foreslår at det skal være 28 ruter mellom kyrne? Da kan du hjelpe barnet med å tegne en lang rekke ruter, slik at det kan telle 28 plasser mellom dyrene! På denne måten får barna sjansen til å lære mange begreper om plassering: i midten, mellom, ved siden av, første rute, andre rute osv. De vil også bruke tall og telling.

Så kan du gi barna oppgaven din, fortelle dem at dyrene er blitt uvenner, og regelen er at ingen par av samme slag kan stå sammen. Be barna forsøke å plassere dyrene slik at de med samme farge eller slag ikke står ved siden av hverandre.





La barna forklare en og en til gruppen hvordan de har stilt opp sine dyr. Etter at barna forstår begrepene og kan forklare med sine egne ord dyrenes plassering, kan du gi dem hele oppgaven med regelen om at det er 1 rute mellom et par, 2 ruter mellom et annet par osv. Barna kan nå jobbe som en hel gruppe for å løse oppgaven. Mens barna utforsker og prøver ut, kan du snakke med dem om strategier. Still spørsmål som: «Er det nok plass her?» «Nå har vi prøvd denne måten å starte på, og det gikk ikke. Hva skal vi gjøre da?» La barna driver utforsking – når barna blir ledet gjennom en problemløsningsprosess og får sjansen for å foreslå nye løsninger, har de alltid gode forslag!

Barna kan være veldig utholdende i problemløsningsprosessen. De kan godt holde på en time i en slik situasjon! Hvis de ikke kommer frem til en løsning, er det helt greit å legge bort problemet og komme tilbake neste dag. Ikke bli overrasket hvis barna fortsetter med oppgaven og lager sine egne oppgaver i etterkant!

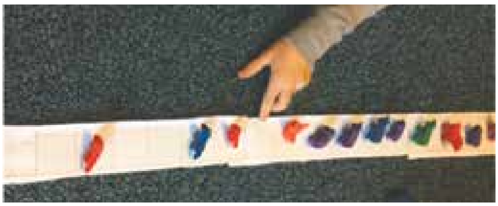
Barna kan klare mye mer enn vi tror!

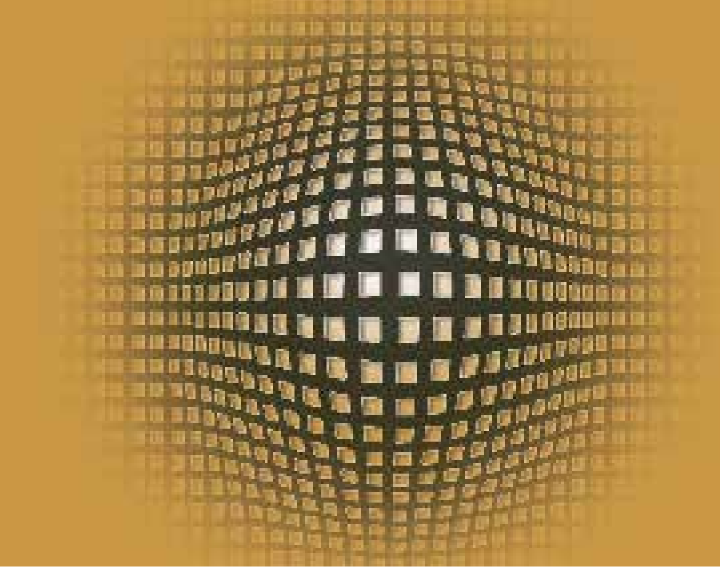
Barn kan og vil lære matematikk. Du kan bli veldig overrasket over hva små barn kan gjøre, og hvor mye matematikk de er i stand til å lære hvis du oppmuntrer dem til å være utholdende, snakke om strategier, sette ord på hva de gjør, og komme med egne forslag.

Utvidelse

Hva hvis det var 5 par dyr? 3 par? 6 par? Hva hvis du endrer reglene?

Og til slutt en ekstra oppgave til deg: Er det mulig å finne en generell løsning uansett antall par? (Denne oppgaven fasinerer meg, og jeg har ikke funnet en løsning ennå, send meg gjerne en e-post hvis du finner en!)





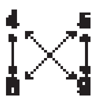
Oppgaver

Torkildsen

Multiplikasjon på skrå

To tallpar

Velg to par av to tall som følger rett etter hverandre, f.eks. 4, 5 og 8, 9. Skriv tallene over hverandre, multipliser «nedover» og «på kryss», og legg sammen produktene. Eksempelvis:



Multiplikasjon «nedover»:
$4\cdot 8 + 5\cdot 9 = 32 + 45 = 77$
Multiplikasjon «på kryss»:
$4\cdot 9 + 5\cdot 8 = 36 + 40 = 76$

Velg andre tallpar og gjennomfør de samme multiplikasjonene og addisjonene. Studer resultatene og se om du kan finne et mønster. Kan du forklare hvorfor dette mønsteret må være rett?

Hva om det nå velges to tallpar der forskjellen mellom tallene er 2, og der de samme utregningene gjennomføres? Hvilket mønster finner du nå? Sammenlign med det mønsteret som du fant ovenfor, og kommenter.

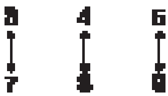
Hva om forskjellen mellom tallene i tallparet er 3? Hva blir mønsteret? Kommenter. Hva tror du mønsteret blir når forskjellen mellom tallene i tallparet er 7? Kan du forklare hvorfor dette mønsteret må være rett?

Dette kan utforskes videre ved at forskjellen mellom tallene i de to tallparene er ulik, f.eks. at i det ene tallparet er forskjellen mellom tallene 2 og i det andre paret er forskjellen 3.

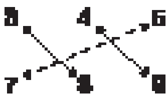
Ole Einar Torkildsen
Høgskulen i Volda
oet@hivolda.no

To talltripler

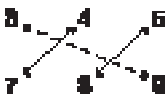
Nå skal du to ganger velge tre tall, talltripler, hvor tallene følger rett etter hverandre, f.eks. 3, 4, 5 og 7, 8, 9. Gjennomfør «nedover»- og «på kryss»-multiplikasjoner:



Multiplikasjon «nedover»:
$3\cdot 7 + 4\cdot 8 + 5\cdot 9 = 21 + 32 + 45 = 98$



Multiplikasjon «på kryss mot høyre»:
$3\cdot 8 + 4\cdot 9 + 5\cdot 7 = 24 + 36 + 35 = 95$



Multiplikasjon «på kryss mot venstre»:
$4\cdot 7 + 5\cdot 8 + 3\cdot 9 = 28 + 40 + 27 = 95$

Velg flere talltripler der tallene følger rett etter hverandre, og gjør det samme. Studer resultatene og skriv ned. Hva blir mønsteret?

Velg så talltripler der forskjellen mellom to tall som følger etter hverandre er 2, f.eks. 3, 5, 7 og 4, 6, 8, og gjennomfør multiplikasjon «nedover». Gjør dette med flere tripler.

Studer resultatene og kommenter. Finner du et mønster, en regel? Kan du forklare hvorfor mønsteret eller regelen må være rett?

Hovtun

Løsningsforslag

Dette er en løsning på oppgaven som stod i *Tangenten* nr. 3 i 2017. Du skulle vise at når en likesida trekant har sidelengde 1, så vil arealet av et innskrevet kvadrat være 1/6.

Denne oppgaven har flere positive elementer med seg:

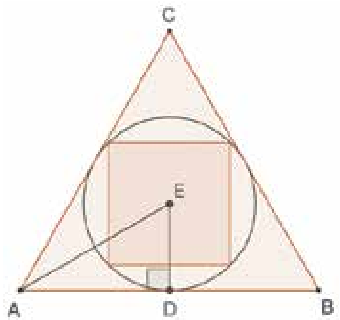
- Den kan løses ved hjelp av ungdomsskolematematikk.
- Det er flere ulike strategier for å løse oppgaven.
- Problemløseren får god trening i å regne med eksakte verdier.

Løsningsforslag

For å løse denne oppgaven vil det være avgjørende å finne ut hvor lang radiusen i sirkelen er. Det er fordi radiusen er halve diagonalen i kvadratet. Vi kan altså bruke radiusen til å finne arealet av kvadratet.

Dersom vi halverer sider og vinkler i den likesida trekanten, vil alle halveringslinjene krysse hverandre i punkt *E* (figur 1). Dette punktet vil være like langt fra alle sidene og like langt fra alle hjørnene. Punkt *E* vil altså være midtpunkt for både trekanten, sirkelen og kvadratet. Vi setter av et punkt *D* midt på *AB*. Da kan vi tegne opp den rettvinkla trekanten *ADE*. Siden linjestykket *AE* er halveringslinjen til vinkel *DAC*, kan vi konkludere med at vinkelen er 30°. Vi kan nå tegne opp en hjelpefigur av trekant *DAE* (figur 2).

Gaute Hovtun
Universitetet i Stavanger
gaute.hovtun@uis.no



Figur 1

Siden dette er en 30-60-90-graders trekant, vet vi at $AE = 2{\cdot}DE$. Nå kan vi bruke Pytagoras' setning for å finne de to ukjente sidene:

$$(2\cdot DE)^2 - DE^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \square \quad 4\cdot DE^2 - DE^2 = \frac{1}{4}$$

$$3\cdot DE^2 = \frac{1}{4} \quad \square \quad \sqrt{3}\cdot DE = \frac{1}{2} \quad \square \quad DE = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}$$

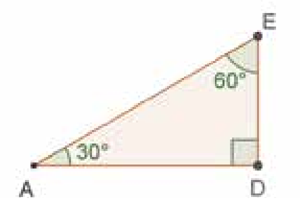
Vi husker at *DE* er radius i sirkelen. Det betyr også at *DE* er halve diagonalen i kvadratet. Vi lager oss nå en hjelpefigur av kvadratet (figur 3).

Vi vet at $KE = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}$. Da er $KM = \frac{2\cdot 1}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vi bruker Pytagoras' setning for å finne sidene i kvadratet:

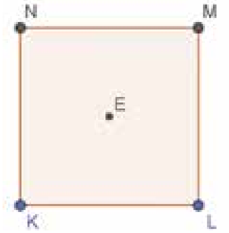
$$KM^2 = KL^2 + LM^2 \quad \square \quad KM^2 = 2KL^2$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2KL^2 \quad \square \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}KL$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = KL \quad \square \quad KL = \frac{1}{\sqrt{6}}$$



Figur 2



Figur 3

Vi vet nå sidelengden på kvadratet. Arealet blir da:

$$A=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 \quad \square \quad A=\frac{1}{6}$$

Alternative løsningsmetoder

Det er også mulig å dele inn figuren som i figur 4. Her vil trekantene *ABE*, *BCE* og *CAE* være kongruente. Det vil si at arealet av trekant *ABC* er tre ganger så stort som arealet til trekant *ABE*. Dette kan vi bruke til å finne *h*, som altså er radius i sirkelen. Vi kan nå finne arealet av trekanten på to forskjellige måter:

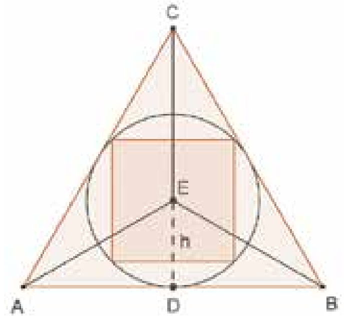
$$A=3\left(\frac{AB\cdot h}{2}\right) \quad \text{og} \quad A=\frac{AB\cdot DC}{2}$$

Dette gir oss følgende likning:

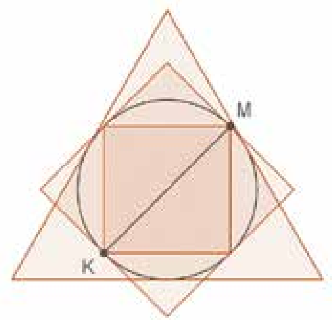
$$3\left(\frac{AB\cdot h}{2}\right)=\frac{AB\cdot DC}{2}$$

Denne kan løses med hensyn på *h*. Leseren utfordres til å fullføre utregningen.

I løsningsforslaget ovenfor fant vi at diagonalen i kvadratet, *KM*, er $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Her kan vi også

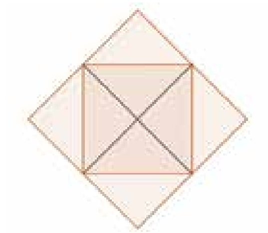


Figur 4



Figur 5

følge en alternativ rute videre. Vi kan se for oss at *KM* er sidelengden i et nytt kvadrat som da får areal 1/3 (figur 5).



Figur 6

Dersom vi bare fokuserer på de to kvadratene, får vi figur 6. Arealet av det store kvadratet vil være dobbelt så stort som arealet av det lille kvadratet. Dette kan vi lett bevise ved å se på kongruente trekanter. Det betyr at arealet av det lille kvadratet blir:

$$A=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{2}=\frac{\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{6}$$

Erfjord, Hundeland

Lærere lærer sammen

Innledning

Denne artikkelen viser hvordan lærere gjennom et læringsfellesskap kan utvikle sin egen matematikkundervisning. Vårt utgangspunkt er at man ikke er ferdig utlært når man har fullført sin lærerutdanning, ei heller etter å ha undervist en tid. Som lærer har man hele tiden behov for å utvikle nye erfaringer om hva som er gode og mindre gode måter å undervise på (Grevholm, 2013).

Det er en utfordring i en travel hverdag å få tid til å reflektere over egen undervisning. Dessuten ser man den som regel kun fra sitt eget perspektiv, noe som gjør det vanskelig å vurdere hvordan undervisningen oppfattes fra elevenes perspektiv. Hvis man derimot samarbeider med kolleger, kan man observere og få innspill om hva som preger egen undervisning, og hva som eventuelt kan endres til det bedre.

Denne artikkelen handler om en gruppe lærere som har et mål om sammen å utvikle matematikktimene sine på ungdomsskolen. Dette gjøres gjennom en spesifikk samarbeidsmodell som det redegjøres for. Videre drøftes effekten et slikt samarbeid kan ha. Målet for lærerne var å finne måter å implementere digitale verktøy i matematikkundervisningen på, som de dessuten ønsket skulle preges av en utforskende og problemløsende atmosfære. Det vil si at det skulle tilrettelegges for at elevene kunne utforske både matematiske problemstillinger og måter å bruke digitale verktøy på som redskap i arbeidsprosessen.

Ingvald Erfjord
Universitetet i Agder
ingvald.erfjord@uia.no

Per Hundeland
Universitetet i Agder
per.s.hundeland@uia.no

Digitale verktøy i matematikkundervisningen

Lærerne i studien deltar i prosjektet «Digital interaktiv matematikkundervisning» (heretter kalt DIM). To skoler, Ve skole og Samfundets skole, samarbeider med Universitetet i Agder om å utvikle undervisningopplegg i matematikk for hele ungdomstrinnet. Digitale verktøy kan bidra direkte til matematikken, slik som et regneark, et dynamisk matematikkprogram (GeoGebra) eller en lommeregner gjør. I DIM brukes digitale verktøy også i en bredere forstand. Læringsplattformer, delingssteder som Google disk, digitale nettbrett (iPad) og digitale tavler blir brukt i kommunikasjonen mellom elevene og mellom elever og lærer.

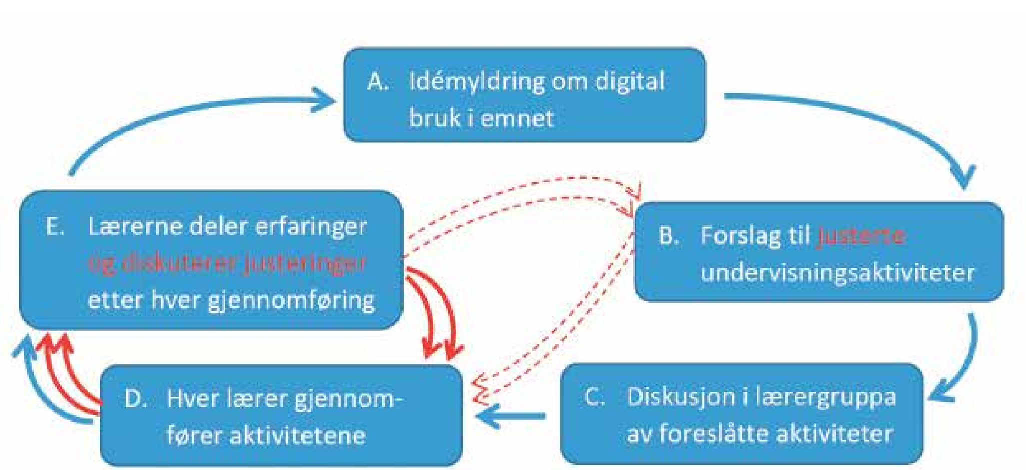
Lære sammen

I løpet av prosjektperioden har lærerne på omgang designet forslag til undervisningsaktiviteter innenfor ulike matematiske emner. Hvert emne gis gjerne et tidsomfang på 3–4 uker, og de digitale aktivitetene i undervisningen utgjør en betydelig del av dette. Forslagene til undervisningsaktiviteter blir delt med de andre lærerne i prosjektet på en plattform (Google-disk). Deretter møtes lærerne for å drøfte detaljer og endringsforslag. Etter at undervisningsaktivitetene er «godkjent», gjennomfører lærerne disse i sine klasser. På neste møte blir de gjennomførte aktivitetene diskutert og erfaringer utvekslet, før erfaringer fra dette tas med inn i planlegging av en ny designsyklus. En slik syklus blir i den artikkelen kalt DIM-syklusen. Ferdige undervisningsaktiviteter publiseres fortløpende på DIM-prosjektets nettside: http://www.dim2015-18.no/.

DIM-syklusen har praktiske begrensninger for hvor detaljert erfaringsdeling det er mulig å få til mellom lærerne. Lærerne ønsket å få til en mer systematisk læringsprosess. En nærliggende parallell til det som var ønsket, finner vi i det som ofte omtales som «lesson study» (Alston, Pedrick, Morris og Basu, 2011; Stiegler og Hiebert, 1999), slik det blant annet gjennomføres i Japan. Der møtes en gruppe lærere jevnlig med formål å utvikle undervisningen. En kortversjon av en «lesson study»-sekvens kan skisseres opp slik:

1) Man blir enig om et problem eller en utfordring som gruppa skal arbeide med.
2) Gruppa planlegger en undervisningsøkt. I en «lesson study» kan denne prosessen ta lang tid, både uker og måneder.
3) Undervisningsopplegget gjennomføres av en av lærerne i gruppa, de andre lærerne observerer. Siden alle har vært deltakende i prosessen med å utvikle undervisningsopplegget, er fokuset mest på undervisningsopplegget og ikke spesifikt på læreren. Alle føler derfor eierskap til resultatet, både når det går bra og dårlig.
4) Undervisningsopplegget evalueres og justeres der det er behov for dette. Deretter gjennomføres det en ny undervisningsøkt med en annen elevgruppe og en annen lærer.
5) Ny evaluering gjennomføres neste gang gruppa møtes. Nye justeringer foreslås. Resultatene fra hele prosessen deles med andre lærere, både lokalt og nasjonalt gjennom ulike formidlingskanaler.

Lærerne døpte sin «lesson study»-pregede sekvens for «DIM-trippel» siden den involverte tre lærere som skulle drive samme undervisningsaktivitet i tre ulike niendeklasser. I figur 1 er den opprinnelige DIM-syklusen illustrert



Figur 1: Modell av DIM-trippelen for planlegging og gjennomføring av undervisningsaktiviteter

med blå bokser, blå piler og hvit tekst. De røde pilene og den røde teksten illustrerer de justeringene som DIM-trippelen innebar, der det etter hver gjennomføring var en samtale der erfaringer og forslag til justeringer til neste gjennomføring ble diskutert. Dette resulterte også i mindre justeringer på selve undervisningsaktiviteten slik det er illustrert med prikket pil via punkt B.

I DIM-trippelen vi ser på, gjennomførte lærerne undervisningsaktiviteten mens de andre lærerne i prosjektet og forskere fra Universitetet i Agder deltok som observatører og i refleksjonssamtale etter timene. Der ble timen diskutert; blant annet drøftet man hva som hadde fungert bra, og hva som eventuelt burde endres. Den læreren som stod for tur til å ha undervisningsaktiviteten, fikk med seg mange råd til sin detaljplanlegging. I en original «lesson study» ville gruppa på dette tidspunktet arbeidet kollektivt videre med redesign av undervisningsaktiviteten før ny gjennomføring. Denne fasen ble av praktiske årsaker kraftig redusert, og ansvaret for redesign ble lagt på den læreren som stod for tur til å undervise. Samme prosess ble gjennomført etter andre og tredje undervisningsøkt.

Matematikkproblemet

DIM-trippelen i denne artikkelen tok utgangspunkt i et matematikkproblem (se figur 2) som skulle være en introduksjonsaktivitet til temaet overflate og volum på 9. trinn, og som ble utviklet som skissert i figur 1, trinn a)–c).

Den matematiske utfordringen i første del av opplegget er å finne ut hvor mye man skal klippe bort for å få størst mulig volum på esken.

Undervisningsaktiviteten åpner for ulike tilnærminger. Starten hvor elevene bruker papir og saks, gir en lav inngangsterskel til det matematiske problemet, og det er en relativ lett utfordring å beregne volumet av en konkret eske når man vet alle lengdene. Elevene kan lage ulike esker hvor de hver gang klipper ut kvadrater

a) Brette esker

Av ett A4-ark kan vi lage en eske uten lokk.
Klipp bort et kvadrat i hvert hjørne av arket. De fire kvadratene som klippes bort, skal være like store.
Brett opp de fire flippene så de blir vegger i esken.
Bruk eventuelt teip til å feste hver flipp til naboflippene for å hindre at de legger seg ned igjen.
Hvor stort volum klarer dere å lage?

b) Overflate og volum

Har esken som har størst volum, også størst overflate?

c) Funksjonsuttrykk

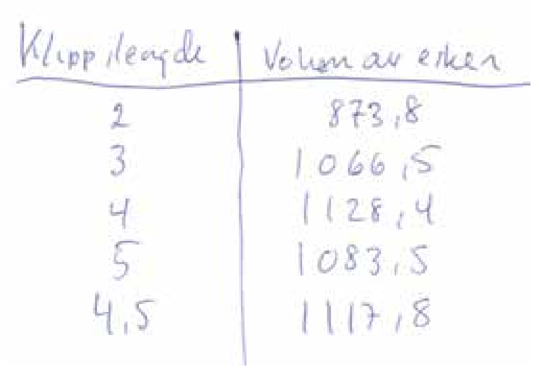
Finn et funksjonsuttrykk for volumet av esken som funksjon av sidekanten i kvadratene som er klippet bort. Tegn grafen i GeoGebra.

Figur 2: Kopi av oppgavearket til undervisningsøkten

Figur 3: Elever prøver ut ulik størrelse på klipp og beregner volum

med ulike størrelser. Oppgaven gir mulighet til å systematisere ved at elevene kan registrere ulike resultater, slik det er illustrert i figur 4, og viser at volumet er størst hvis man klipper bort kvadrater med sidelengde et sted mellom 4 og 4,5 cm.

På dette tidspunktet er det mulig å integrere digitale verktøy i problemløsningsprosessen.



Klipp lengde	Volum av esken
2	873,8
3	1066,5
4	1128,4
5	1083,5
4,5	1117,8

Figur 4: Elever prøver ut ulik størrelse på klipp og beregner volum

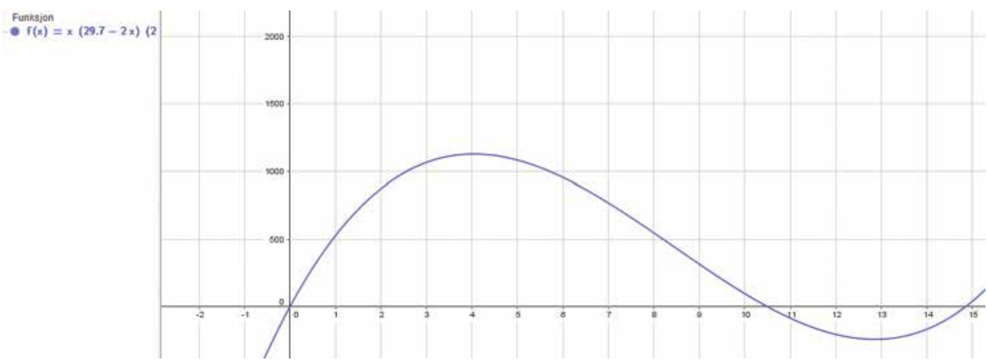
Elevene kan ta utgangspunkt i volumformelen $V = lengde \cdot bredde \cdot høyde$ for en eske og lage en algebraisk formel for volumet. Denne formelen kan ved hjelp av regneark generere volum for ulike verdier av utklippslengden, og det kan lages diagram, slik det er vist i figur 5.

En tredje mulighet kan være å anvende et funksjonsuttrykk i en graftegner (f.eks. GeoGebra) for deretter å få fram et toppunkt på grafen (figur 6). Dette toppunktet vil da gi den klippelengden som gir den største esken.

DIM-prosjektet fokuserer på at matematikk læres best ved en undersøkende og problembasert tilnærming til lærestoffet. Det er derfor viktig for lærerne i prosjektet at de ikke stresser én måte å gjøre ting på. En viktig rettesnor for å arbeide problembasert er at elevene får mulighet til (1) å forstå problemet, (2) lage en plan og gjennomføre den, (3) se tilbake og reflektere, (4) utvide og generalisere. Dette er de anbefalinger

	A	B
1	Klipplengde	Volum av eske
2	1	526,300
3	2	873,800
4	3	1066,500
5	4	1128,400
6	5	1083,500
7	4,5	1117,800
8	4,2	1127,196
9	4,1	1128,320
10	4,05	1128,492
11	4,04	1128,495
12	4,03	1128,487
13		

Figur 5: Volum av eske ved ulike klipp og diagram over disse laget ved hjelp av regneark



Figur 6: Volum av eske som funksjon av klipplengde laget ved hjelp av GeoGebra

som Polya ga for å gjennomføre en fruktbar problemløsningsprosess (Polya 1957). Fasene (1) og (2) ble i stor grad overlatt til elevene, mens (3) og (4) til en viss grad ble planlagt gjort i samarbeid med lærer, enten underveis eller som del av oppsummeringen på slutten av økten.

Læring fra gjennomføringen

Undervisningsopplegget ble gjennomført i tre niendeklasser. De to første øktene ble gjennomført på slutten av en skoledag og på formiddagen påfølgende dag, slik at det var liten praktisk mulighet for å gjøre omfattende endringer fra den første økten til den andre. Den tredje økten ble gjennomført 6 dager etter andre økt.

De tre undervisningsøktene har mye felles, noe som er naturlig da de bygger på samme utgangspunkt og gjennomføres av lærere som samarbeider tett om innholdet i matematikkundervisningen. Vi ser imidlertid spesielt på justeringer av undervisningsaktiviteten fra de to første gjennomføringene til den siste. For enkelhets skyld sammenligner vi derfor den første økten med den tredje for å gi et bilde av den utviklingen som skjedde, og de refleksjonsprosessene lærerne gikk gjennom som et resultat av samarbeidet i DIM-trippelen.

Undervisningsøkt 1

Læreren introduserte oppgaven på en digital tavle. Elevene fikk utdelt papir og saks som hjelpemiddel til å lage esker og arbeidet deretter to og to i om lag en klokketime. Flere lærere gikk rundt og hjalp gruppene. Vi observerte at lærerne brukte utforskende spørsmål, ga elevene noen hint og forsøkte å få dem til å systematisere de funnene de gjorde. Noen elever fikk hjelp til å plotte punkter eller formulere en formel for volum i et GeoGebra-koordinatsystem.

Den siste halvtimen brukte læreren til en oppsummering i plenum der elevene ble spurt om å vise hva de hadde funnet fram til, og hvordan. En elevgruppe projiserte en GeoGebra-fil tilsvarende den i figur 6 fra sitt nettbrett opp på den digitale tavlen. Andre elever presenterte en tabell fra Google regneark tilsvarende den som er vist på figur 5. På spørsmål fra læreren illustrerte en av elevene med papir hva som skjedde dersom man klippet for mye i hjørnene, slik at det ikke lenger var mulig å brette en eske. Dette ble gjort helt på slutten av undervisningsøkten slik at det ikke ble tid til å sammenligne dette resultatet med dets analogi i grafen (se figur 6), der hvor den har nullpunktene (0 som betyr ingen klipp, 10,5 hvor alt på kortsiden av arket er klipt bort, og 14,85, der hele langsiden er klipt bort). Avslutningsvis introduserte læreren størrelsen x som klipp og forklarte innholdet i formelen $y = (29{,}7 - 2x)\,(21 - 2x)\,x$, som lå til grunn for formelen i regnearket og grafen i GeoGebra.

Samtale etter undervisningsøkt 1

En observasjon som kom fram i samtalen, var at elevene brukte mye tid på det som ble omtalt som systematisk utforskning av problemet ved at de klippet og lagde esker. En problemstilling som ble diskutert, var hvordan man kunne fått elevene over i en mer utforskende modus. Et forslag som ble drøftet, var om man som lærer bør avbryte prosessen tidligere og spørre elevene om de hadde noen hypoteser om hvordan problemet kunne løses. Dette forslaget ble veid mot verdien av at elevene selv måtte få tilstrekkelig tid til å reflektere over problemet og selv få muligheten til å tenke ut mulige strategier for å finne løsninger. Ved å lansere hypoteser i plenum var det en fare for at flinke elever raskt ville gi en riktig løsning og på den måten forringe de andre elevenes tankeprosess.

Oppgavearket inneholdt også to andre utfordringer (figur 2, punkt b) og c)). Kun et fåtall rakk å se nærmere på disse. Det ble foreslått at man kanskje burde redusere undervisningsopplegget til kun å handle om volum av esken (punkt a).

En annen utfordring gjaldt bruk av digitale verktøy. Det ble observert at mange elever ikke kom så langt at de fikk brukt verken regneark eller GeoGebra. Lærerne så en sammenheng hvor det at elevene fikk systematisert mer, kunne føre til at bruken av digitale verktøy økte. En idé som ble nevnt, var at læreren kunne gi elevene et skjema hvor de kunne fylle ut med lengder og tilhørende eskevolum etter hvert som de brettet esker. Dette kunne i neste omgang inspirere elevene til bruk av regneark.

Det ble også diskutert hva som kunne anses å være målet med undervisningsopplegget. Læreren som nettopp hadde gjennomført undervisningsøkten, stadfestet at det matematiske målet var å kunne regne ut volumet av et prisme. Andre foreslo prosessmål som at elevene skal få laget en grafisk framstilling av problemet og deretter kunne tolke seg fram til en løsning på problemet.

Lærer 3 påpekte at man som lærer har en tendens til å lede elevene for raskt inn på den algoritmiske tilnærmingen med formel, og at elevene på den måten mistet begrepsforståelsen. Han hadde stilt noen kontrollspørsmål til en elevgruppe, og de hadde hatt vansker med å redegjøre for volumformelen til prisme i forhold til formlene for pyramide. Han fortalte at han ofte opplevde at elevene blandet volumbegrepet og arealbegrepet når han selv trodde de behersket dette, noe som er dokumentert som et kjent problem for elever (se Grevholm, 2013). Han fortalte at han i sin undervisningsøkt ville legge vekt på volumbegrepet ved å fokusere på at volum er antall en-kubikks terninger det er plass til i esken, og ikke ha så sterkt fokus på beregning av volum fra formel.

Samtalen endte ikke opp i noen klare konklusjoner, men fungerte som en utveksling av synspunkter og erfaringer. Eventuelle justeringer ble overlatt til de neste lærerne som skulle gjennomføre undervisningsaktiviteten. Som nevnt observerte vi kun mindre justeringer i gjennomføringen av undervisningsøkt 2, men litt større endringer i undervisningsøkt 3.

Undervisningsøkt 3

Lærer 3 startet økten med en plenumssamtale der forskjell mellom kvadrat og kubikk ble kommentert, og læreren tegnet opp et 5 cm x 10 cm rektangel på tavla og spurte om arealet. Svaret 50 ble problematisert utover selve algoritmen for å regne det ut. Dette var i tråd med de ideene læreren presenterte på refleksjonsmøtet en uke tidligere.

Oppgaven ble introdusert på en litt annen måte enn i de forrige to øktene. Oppgavearket ble ikke presentert, men i stedet viste læreren fram et A4-ark og klippet ut fire kvadrater, ett i hvert hjørne. Deretter ble det lagt inn et konkurranseelement i aktiviteten ved å utfordre elevene til å lage den største esken.

Etter en halv times arbeid ble klassen samlet til en midtveisoppsummering på cirka 15 minutter. Dette var i tråd med forslag som ble diskutert en uke tidligere i lærersamtalen. Læreren ba gruppe for gruppe lese opp ett resultat hver fra eskeproduksjonen, dvs. lengden på kvadratet de hadde klippet ut, og det tilhørende volumet som de hadde regnet ut. Lærer 3 satte resultatene inn i en forhåndstegnet tabell på den elektroniske tavlen og avsluttet midtveisoppsummeringen med å oppfordre elevene til å bruke regneark eller GeoGebra som hjelpemiddel for å systematisere sine funn. Her tok læreren igjen opp tråden fra lærersamtalen en uke tidligere og styrte elevene mot mer systematisk utforskning med støtte i bruk av digitale verktøy. Flere elevgrupper fikk i arbeidsøkten hjelp til å bruke regneark for å systematisere resultatene og legge inn formel for volum i regnearket.

Økten ble avsluttet med en felles oppsummering der alle gruppene presenterte fra arbeidet sitt. Dette ble hovedsakelig gjort ved at elevene brukte sine nettbrett og projiserte det de hadde gjort, på en digital tavle. Læreren kommenterte og grep for eksempel fatt i tallet 4,043 cm, som en gruppe hevdet var det korrekte utklippet for å maksimere volumet. Læreren spurte elevene om hva som var forskjellen på tallet 4,043 og tallet 4,04, som en annen gruppe hadde oppgitt som korrekt løsning. Videre ble regnearkkodingen diskutert, og grafene som framkom på skjermen, ble samtalt om. Det ble problematisert at bare deler av grafen er innenfor et gyldighetsområde for eskeproblemet, tilsvarende som diskusjonen initiert av lærer 1 en uke tidligere med støtte i en graf i GeoGebra.

Samtale etter undervisningsøkt 3

Samtalen startet med at midtveisoppsummeringen ble kommentert. De to andre lærerne mente at den bidro til et fokus på systematikk og bruk av digitale verktøy i utforskningen, og de ga uttrykk for at dette var noe de ville ta med seg til neste gang de skulle gjennomføre en liknende undervisningsaktivitet. Lærer 3 var imidlertid i tvil om det hadde gått for mye tid med til denne oppsummeringen på bekostning av tid til fri utforskning. Balansegangen mellom fri utforskning og lærerstyrt aktivitet ble igjen et tema uten at man kom til noen bestemt konklusjon. Det ble også poengtert at det ble noe hektisk i den avsluttende oppsummeringen, der alle gruppene presenterte. Det ble stilt spørsmål om man kunne nøyd seg med å plukke ut et utvalg som kunne brukes til å få fram de faglige målene læreren hadde for undervisningsaktiviteten. Her var det argumenter begge veier, der motargumentet var at det var stas for elevene å få legge fram sitt arbeid.

Diskusjon: Hva har lærerne lært gjennom en slik prosess?

Vi viste tidligere i artikkelen til «lesson study»-metodikk. DIM-trippelen har visse likheter med en slik måte å jobbe på: En gruppe lærere har felles mål om å videreutvikle sin undervisning for å fremme bedre matematikklæring. Som i «lesson study» inneholdt DIM-trippelen en læringssyklus hvor man (1) sammen utvikler noe, (2) deretter forsøker dette ut, (3) reflekterer over resultatet, (4) for deretter prøve ut et justert opplegg, og (5) reflektere over resultatet etter ny gjennomføring.

Det er imidlertid også noe som skiller vår trippel fra en «lesson study»-sekvens, primært tidsaspektet og innsatsen som legges ned i å utvikle undervisningsaktiviteten. I en «original» «lesson study»-gruppe vil lærerne møtes regelmessig for å utvikle et bestemt undervisningsopplegg for for eksempel introduksjon av brøk. Over en lengre periode og i flere møter vil gruppa diskutere mål for en slik undervisningsøkt, de vil konsultere forskning og andre læreres erfaringer og så planlegge undervisningsopplegget i minste detalj. Etter å ha gjennomført opplegget vil de jobbe videre med nye justeringer og ny utprøving. I løpet av et arbeidsår vil en slik gruppe kanskje kun ha planlagt og gjennomført 1–3 undervisningsopplegg. I Japan har de et godt system for å videreformidle erfaringer fra slike «lesson studies», slik at det er gode muligheter for å lære av hverandre. Et viktig spørsmål er om det er mulig å få til et tilsvarende system blant norske lærere?

Hva kan man si at lærerne oppnådde i sin DIM-trippel? Selv om det var begrenset i tid og innsats, oppnådde lærerne at de sammen fikk tid til å reflektere over ulike sider ved undervisningsaktiviteten og måter å gjennomføre den på. Dette gjaldt både hvor mye elevene skal arbeide, hvor mye læreren skal styre, hvordan oppgaver bør lages og presenteres i klasserommet, og hvordan man kan fremme digitale verktøy som en del av undervisningsprosessen. Videre vil vi framheve de diskusjonene som foregikk i gruppa om overordnede pedagogiske aspekter. Dette gjaldt for eksempel hvordan man kan fremme en undersøkende og problemorientert matematikkundervisning, hvordan kommunikasjonen bør foregå i matematikkundervisningen, og hvordan digitale verktøy kan komme naturlig inn i undervisningen. Man var enig om at undervisningsopplegget som ble gjennomført, ikke var avhengig av digitale verktøy, men at man ved å ta dem i bruk ville få en merverdi i form av mer effektivitet i utforskningen av mulige løsninger. Det var også svært tydelig at lærerne opplevde hele prosessen som lærerik og motiverende. Det å avsette tid til å samarbeide om matematikkundervisning på den måten hadde en egenverdi.

Trenden i norsk utdanning er å stille høyere kompetansekrav til lærerne. Blant annet kreves det nå minst ett års utdanning i matematikk for å være kvalifisert for å undervise i matematikk på ungdomstrinnet. Den ordningen bygger muligens på en hypotese om at økt formell utdanning vil føre til bedre kvalitet i undervisningen. Det er ikke sikkert at denne hypotesen er den eneste sannhet man bør støtte seg på. Utdanning i det faget man underviser, er en *nødvendig* forutsetning for å kunne gi god undervisning, men det er ikke en *tilstrekkelig* forutsetning for at god undervisning oppnås. Undervisning er en kulturell aktivitet hvor lærere gradvis har utviklet og tatt opp i seg tanker om hvordan undervisning bør foregå. Dette tankesettet er ikke noe som enkelt endres gjennom et videreutdanningsopplegg eller et kompetanseløft fra myndighetene. Undervisning må endres gradvis gjennom læreres egen læring (Stiegler og Hiebert, 1999). Dette kan oppnås ved at matematikklærere får tid, og at det tilrettelegges for samarbeid som er godt planlagt, er regelmessig og går over lang tid. DIM-trippelen viser et eksempel på et tiltak som kan være utviklende for læreres streben etter å høyne kvaliteten på egen undervisning.

Referanser

Alston, A. S., Pedrick, L., Morris, K. P. & Basu, R. (2011). Lesson study as a tool for developing teachers' close attention to students' mathematical thinking. I L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (red.), *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together* (s. 135–152). New York: Springer.

Grevholm, B. (2013). *Matematikkundervisning 1–7*. Oslo: Cappelen Damm AS.

Polya, G. (1957). *How to solve it – a new aspect of mathematical methods*. Princeton: Princeton University Press.

Stiegler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: Free Press.

(fortsatt fra side 20)

Blank, N., Melhus, K. & Moe, G. I. (2014). *Matematikk*. Kirkenes: Barentsforlag.

Boaler, J. (2015). *Mathematical Mindsets*. Chichester: Jossey Bass Wiley.

Melhus, K. (2015). Å stimulere barns evne til å tenke. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 26*(2), 13–16.

Melhus, K. (2014). *Matematikk Lærerveiledning 1A og 1B*. Kirkenes: Barentsforlag.

Moe, G. I. & Moe, S. (2016, 12. oktober). *Utviklende opplæring i matematikk – utfordringer for læreren*. Hentet fra utdanningsforskning.no/artikler/utviklende-opplaring-i-matematikk--utfordringerforlareren/

Moe, G. I. (2015). Barn kan mer – ! *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 26*(3), 29–32.

Kirfel

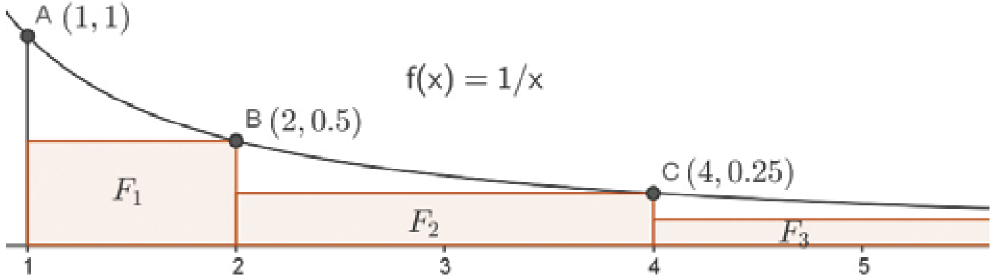
Flaten under hyperbelen

Innledning

Når elever i R2 på videregående skole møter integrasjon i lærebøkene, vil de treffe på integralregningen først som antiderivasjon, se læreverket Sinus (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch og Hals, 2008). De lærer at integralet for lineære funksjoner er $\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$ og integralet av parabelen er $\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$, uten at dette knyttes til arealberegninger. Så utvides resultatet til å gjelde flere potensfunksjoner $\int_0^b x\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}$ for naturlige tall n. Deretter kommer turen til potensfunksjoner med negative potenser $f(x) = \frac{1}{x^m} = x^{-m}$ for naturlige tall $m \geq 2$. Her gjelder samme regel som for de andre potensfunksjonene. Så elevene får inntrykk av at den nevnte regelen allerede er hele sannheten. Men der er ett unntak, hyperbelen $f(x) = \frac{1}{x}$, der regelen naturlig nok ikke kan komme til anvendelse siden nevneren $(n + 1)$ ville blitt null. Da gir formelen ingen mening. Hyperbelen er altså et slags særtilfelle, og elever kan undre seg over hvorfor den faller utenfor mønsteret. Når de da litt senere lærer at $\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \ln(b)$, blir forundringen ikke mindre siden logaritmefunksjonen og potensfunksjonene er så forskjellige. Læreverket Sinus introduserer en kopling mellom antiderivasjon og arealberegninger som kun støtter seg til numeriske beregninger og bruk av digitale verktøy. Integrasjon som en infinitesimal prosess for å beregne arealer blir ikke berørt. Senere presenteres arealaspektet utelukkende ved hjelp av differensial- og integralregningens fundamentalteorem, nemlig at derivasjon og integrasjon er inverse prosesser. Det geometriske aspektet ved integrasjonen blir kraftig tonet ned. Læreverkene presenterer ikke lenger at integraler kan finnes ved å beregne arealer under kurver ved å summere rektangelarealer under kurven, og at man så via en grenseprosess kan komme frem til de korrekte formlene.

I denne artikkelen vil jeg bøte på denne mangelen og prøve å gi en geometrisk tilnærming av hyperbelintegralet som flate under kurven $f(x) = \frac{1}{x}$ som kan beregnes ut fra geometriske overveielser uten å involvere fundamentalteoremet, og håper at den undrende læreren og eleven kan finne en tilfredsstillende forklaring. Presentasjonen i artikkelen og spesielt ideen

Christoph Kirfel
Universitetet i Bergen
christoph.kirfel@uib.no



Figur 1: Rektangelbokser under hyperbelen

med den geometriske følgen for intervalloppdelingen er inspirert av artiklene til Burn (1999), Fermat (1896) og Volkert (1996).

Hyperbelintegralet

Målsettingen vår er å beregne arealet under en hyperbel $f(x) = 1/x$ over et gitt intervall som starter med $x = 1$. Til å begynne med lager vi oss noen rektangelbokser for å få en tilnærming for arealet under kurven, slik elevene er vant med fra andre funksjonstyper, se Oldervoll mfl. (2008, s. 23f). Eksemplene elevene har sett i forbindelse med potensfunksjoner, bygger på såkalte ekvidistante intervalloppdelinger. Det betyr at intervallet vi skal finne arealet over, deles i like delintervaller. En slik oppdeling med like store delintervaller virker naturlig. I tilfellet hyperbel lønner det seg å se på en annen type inndeling, der vi følger toerpotensene, $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$. Se figur 1. Det viser seg nemlig da at alle rektangelboksene får det samme arealet, og det blir enkelt å holde oversikten. Gregorius (se Volkert, 1996), som denne ideen er hentet fra, startet integrasjonen på $x = 1$ og gikk i dette eksempelet frem til en bestemt x-verdi som er en toerpotens. Den første «boksen» tegner vi over intervallet $[1, 2]$. Her blir den laveste funksjonsverdien lik $f(2) = 1/2$, og arealet av boksen er $F_1 = 1 \cdot (1/2) = 1/2$. Neste intervall blir $[2, 4]$ med laveste funksjonsverdi $f(4) = 1/4$. Bredden på rektangelboksen er nå 2, men høyden er gått ned til 1/4 slik at arealet igjen er $F_2 = 2 \cdot (1/4) = 1/2$. Det samme gjelder for intervallet $[4, 8]$. Vi får $F_3 = 4 \cdot (1/8) = 1/2$. Har vi et rektangel over intervallet mellom to påfølgende toerpotenser $[2^{n-1}, 2^n]$, så er bredden $b = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$, mens høyden er den laveste funksjonsverdien, altså $f(2^n) = 1/2^n$. Da er arealet $F_n = 2^{n-1} \cdot (1/2^n) = 1/2$. Alle boksene vil altså ha samme areal 1/2.

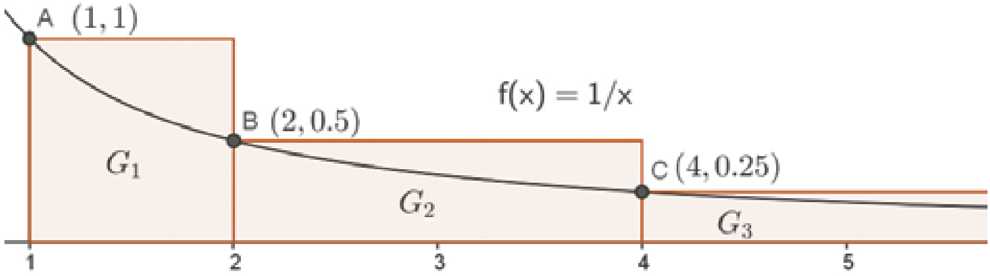
Hvis den øvre intervallgrensen er en toerpotens $x = 2^n$, så vil det samlede boksearealet være $B(x) = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = n \cdot \frac{1}{2}$. Dermed kan vi finne en nedre skranke for flaten $H(x)$ under hyperbelen over intervallet $[1, x]$, nemlig $\frac{n}{2} \leq H(2^n)$. Siden $x = 2^n$ eller $n = \log_2(x)$, kan vi like godt skrive $\frac{1}{2} \cdot \log_2(x) < H(x)$. Vi ser også med en gang at arealet av flaten under hyperbelen er ubegrenset, siden vi kan finne så mange bokser med areal ½ under kurven som vi ønsker.

Vi skal nå finne en øvre skranke for arealet under hyperbelen og lager oss igjen rektangelbokser som denne gangen omslutter hele arealet under kurven til høyre for $x = 1$. Se figur 2. Igjen får boksene samme areal, denne gangen $G_1 = G_2 = \ldots = G_n = 1$, og vi ser at det samlede boksearealet $C = G_1 + G_2 + \ldots + G_n = n \cdot 1$ er en øvre skranke for arealet under kurven mellom 1 og $x = 2^n$. Dermed har vi funnet både en nedre og en øvre skranke for hyperbelintegralet:

$$\frac{n}{2} \leq H(2^n) \leq n$$

eller

$$\frac{1}{2} \cdot \log_2(x) < H(x) < \log_2(x).$$



Figur 2: Rektangelbokser over hyperbelen

En liten variasjon gir oss en atskillig bedre øvre skranke. Erstatter vi rektanglene med trapeser slik som på figur 3, ser vi at hvert trapes har et areal som svarer til 3/4 av arealet til det opprinnelige rektangelet som tilhørte det som kalles oversummen. Derfor må også den samlede summen være 3/4 av den samlede rektangelsummen, og vi kan skrive:

$$\frac{1}{2}\cdot\log_2(x) < H(x) < \frac{3}{4}\cdot\log_2(x) .$$

Formelen er allerede et meget godt steg på veien til det endelige resultatet, men en må huske på at den bare gjelder når grensen x er en toerpotens. Vi skal si noe om situasjonen der den øvre intervallgrensen x ikke er en toerpotens. La oss anta at $2^n < x < 2^{n+1}$. Da ligger toerlogaritmen til x en plass mellom n og $n + 1$, altså $n < \log_2(x) < n + 1$, og det siste rektangelet i rektangelsummen er ikke komplett verken i under- eller oversummen. Da er $\log_2(x) - 1 < n$ og tilsvarende $\log_2(x) + 1 > n$. Det ligger minst n komplette rektangler under hyperbelen i undersummen, og tar vi med $n + 1$ rektangler med i oversummen, har vi garantert overskredet hyperbelarealet. Derfor kan vi skrive

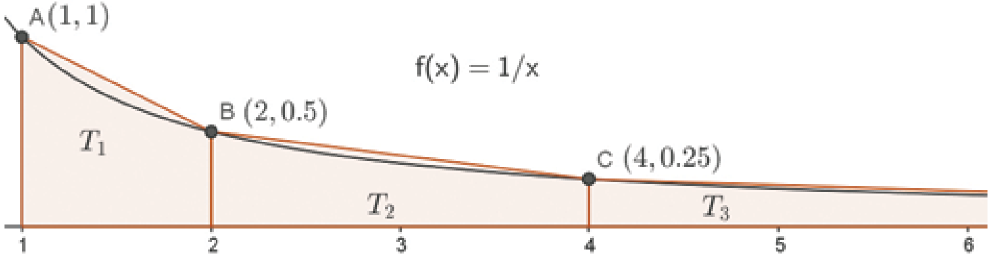
$$\frac{1}{2}\cdot(\log_2(x)-1) < \frac{n}{2} < H(x) < n < \log_2(x)+1$$

eller til og med

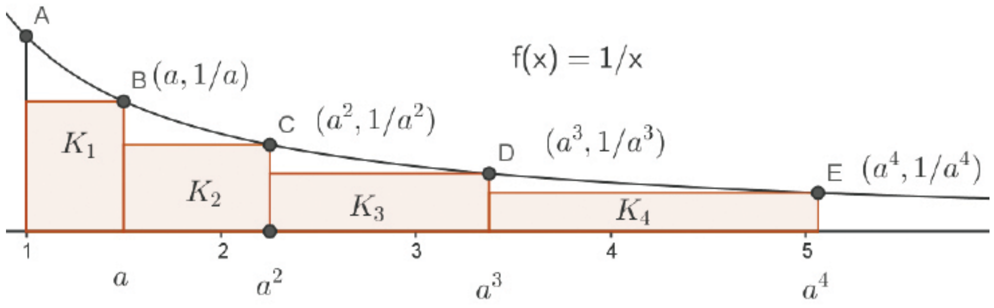
$$\frac{1}{2}\cdot(\log_2(x)-1) < H(x) < \frac{3}{4}(\log_2(x)+1)$$

Konklusjonen er at funksjonen $H(x)$ som beskriver flaten under hyperbelen, kan «sperres» inne mellom to logaritmiske funksjoner, og det er god grunn til å tro at funksjonen selv også er en logaritmisk funksjon. Mange vil være fornøyd med denne forklaringen og ikke etterlyse ytterligere utlegninger. Andre vil tennes av nysgjerrigheten og ønsker et eksakt svar.

Dette blir målsettingen for resten av artikkelen.



Figur 3: Trapeser gir en bedre tilnærming enn rektangler



Figur 4: Ny undersum

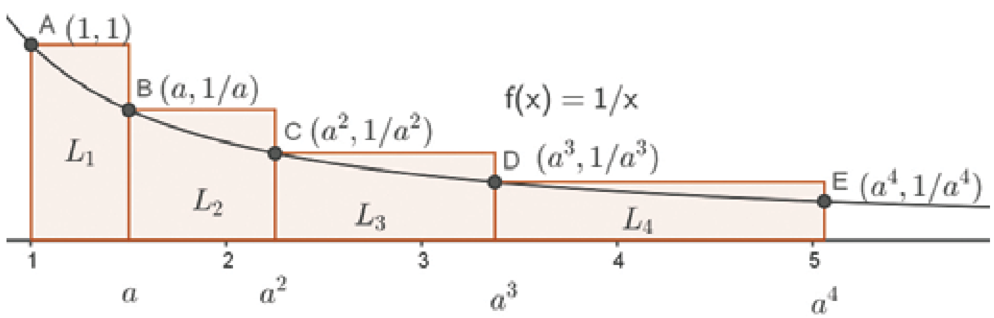
Mot det eksakte resultatet

Hadde vi startet med en rektangelboks som ikke gikk helt fra 1 til $x = 2$, men fra 1 til en verdi $1 < a < 2$, f.eks. $a = 3/2$, ville vi muligens fått en enda bedre approksimasjon enn den vi fikk ovenfor, se figur 4. Vi velger a slik at den øvre grensen x til intervallet blir en potens av a med heltallig eksponent n, altså $x = a^n$. Da unngår vi de ekstrabetraktningene som vi måtte foreta da x ikke var en toerpotens i den første delen av artikkelen. Når vi senere skal minke verdien av a, gjør vi det slik at vi øker n, men vi passer stadig vekk på at $a=\sqrt[n]{x}$.

Vi gjentar resonnementet med dette nye utgangspunktet først for undersummen. Rektangel nummer 1 går da fra 1 til a. Høyden er $f(a) = 1/a$, slik at arealet av den første rektangelboksen er $K_1 = (a - 1)\cdot(1/a) = (a - 1)/a$. Neste intervall blir $[a, a^2]$ med laveste funksjonsverdi $f(a^2) = 1/a^2$. Bredden på rektangelboksen er nå $a^2 - a = a(a - 1)$, slik at arealet igjen er $K_2 = a(a - 1)/a^2 = (a - 1)/a$.

Det samme gjelder for intervallet $[a^2, a^3]$. Vi får $K_3 = a^2(a - 1)/a^3 = (a - 1)/a$. Har vi et rektangel over intervallet mellom to påfølgende potenser av basisen a, altså $[a^n, a^{n-1}]$, så er bredden $a^n - a^{n-1} = (a - 1)a^{n-1}$, mens høyden er den laveste funksjonsverdien, altså $f(a^n) = 1/a^n$. Da er arealet $K_n = a^{n-1}(a - 1)/a^n = (a - 1)/a$. Alle boksene har altså samme areal $(a - 1)/a$. Igjen kan vi argumentere for at vi finner n slike rektangelbokser over intervallet $[1, a^n]$ med et totalareal på $K = K_1 + K_2 + \dots + K_n = n\cdot(a - 1)/a$.

For den tilsvarende oversummen der rektanglene omslutter flaten under hyperbelen, har hver rektangelboks areal $a - 1$. Den første har bredde $a - 1$ og høyde 1, den andre har bredde $a^2 - a$ og høyde $1/a$, osv. Totalarealet blir $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n = n\cdot(a - 1)$. Dermed får vi nye nedre og øvre skranker for hyperbelflaten



Figur 5: Ny oversum

$\frac{(a-1)}{a}\cdot n < H(a^n) < (a-1)\cdot n$, dvs.

$$\frac{(a-1)}{a}\cdot \log_a(x) < H(x) < (a-1)\cdot \log_a(x)$$

eller

$$\frac{(a-1)}{a\cdot \ln(a)}\cdot \ln(x) < H(x) < \frac{(a-1)}{\ln(a)}\cdot \ln(x)$$

siden

$$\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

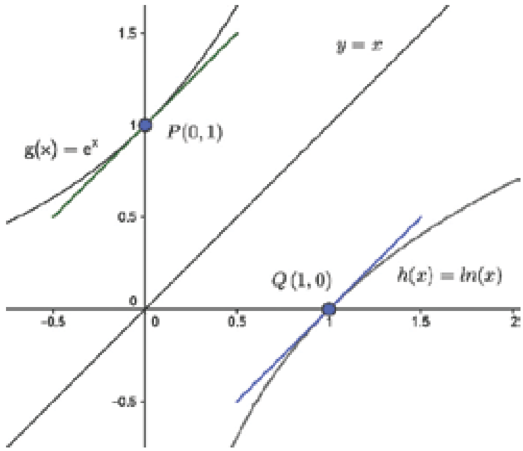
Vi lar nå n gå mot uendelig. Da vil $a=\sqrt[n]{x}$ nærme seg tallet 1, siden x er valgt fast. Hvis grenseverdien $\lim_{a\square 1}(a-1)/\ln(a) = C$ eksisterer, så vil vi få $C\cdot\ln(x)$ □ $H(x)$ □ $C\cdot\ln(x)$ siden $\lim_{a\square 1} 1/a = 1$. Da er den øvre og den nedre grensen for funksjonen $H(x)$ den samme. Det betyr at vi har $H(x) = C\cdot\ln(x)$.

Vi skal vise at grenseverdien eksisterer, og vi skal også beregne den. I utgangspunktet gir det ikke noen mening at vi betrakter en logaritme $\log_a(x)$ der basen går mot 1. Det ville jo si at vi må finne et tall t slik at $1^t = x$. Dette går selvsagt ikke an, men det viser seg at produktet

$$\lim_{a\to 1}(a-1)\log_a(x) = \lim_{a\to 1}(a-1)\cdot\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

der den ene faktor $a - 1$ går mot null mens den andre $\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ går mot uendelig, likevel gir mening.

Nå går vi ut fra at eksponentialfunksjonen $g(x) = e^x$ er kjent som den inverse til logaritmefunksjonen $h(x) = \ln(x)$. Vi antar også at vi kjenner tangentstigningen i punktet $P = (0, 1)$ på eksponentialfunksjonen, nemlig $g'(0) = 1$. Siden den inverse funksjonen er den opprinnelige funksjonens speilbilde om vinkelhalveringslinjen $y = x$, må også tangentstigningen



Figur 6: Inverse funksjoner og deres tangenter

til logaritmefunksjonen i speilpunktet $Q = (1, 0)$ være lik 1, altså $\ln'(1) = 1$. Da har vi

$$1=\ln'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}$$
$$=\lim_{a\to 1}\frac{\ln(a)-\ln(1)}{a-1}=\lim_{a\to 1}\frac{\ln(a)}{a-1}$$

Men dette er jo nettopp den inverse av den etterlengtede grenseverdien C. Dermed får vi $C=\lim_{a\to 1}\frac{a-1}{\ln(a)}=1$ og til syvende og sist at hyperbelintegralet er $H(b)=\int_1^b\frac{dx}{x}=\ln(b)$.

Avslutning

Flaten under hyperbelen kan beregnes på en nokså enkel måte når man går vekk fra den ekvidistante intervalloppdelingen. Ideen kom fra Fermat (1896) og Gregorius (se Volkert, 1996), som arbeidet med hyperbelintegraler på midten av 1600-tallet. Ingen av dem fant det endelige svaret, men begge bidro til løsningen. Med en slik geometrisk tilnærming vil man kunne unngå at hyperbelintegralet bare oppfattes som et resultat som må pugges, og som ikke kan forklares siden det faller utenfor mønsteret med de andre potensfunksjonene. Metoden kan også videreutvikles til å omfatte flere funksjonstyper, se også Kirfel (2014; 2009).

Jeg takker Trond Stølen Gustavsen for grundig gjennomlesning av artikkelen og en rekke gode forbedringstips.

Referanser

Burn, R. P. (1999). Integration, a genetic introduction. *Nordisk Matematikkdidaktikk, 7*(1), 7–27.

Fermat, P. (1896). Sur la transformation et la simplification des équations de lieux, pour la comparaison sous toutes les formes des aires curvilignes, soit entres elles, soit avec des rectilignes, et en même temps sur l'emploi de la progression géométrique pour la quadrature des paraboles et hyperboles à l'infini. I P. Tannery & C. Henry (red.), *OEuvres de Fermat, Tome troisième*, Gauthier-Villars et fils, (s. 216–237). Engelsk oversettelse: http://science.larouchepac.com/fermat/

Kirfel, C. (2014). Integration by geometrical means – A unified approach. *Mathematics Teaching 239*, 23–25.

Kirfel, C. (2009). Integrasjon etter Fermat. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning 20*(2), 39–44.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F. & Hals, S. (2008). *Sinus matematikk, Grunnbok* (R2), Oslo: Cappelen Damm.

Volkert, K. (1996). Die Quadratur der Hyperbel des Gregorius a San Vincentio. Herrn Professor Dr. U. Loettgen (Köln) zum 65. Geburtstag gewidmet. *Journal für Mathematik-Didaktik 17*(1), 3–20.

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
Matematisk institutt UiO
Postboks 1053 Blindern
0316 OSLO

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (Lamis) sette fokus på matematikk for alle.

Styret for LAMIS

Leder
Renate Jensen, Hordaland
Barnetrinnet
Henrik Kirkegaard, Møre og Romsdal
Mellomtrinnet
Inger-Lise Risøy, Buskerud
Ungdomstrinnet
Gerd Nilsen, Hedmark
Videregående skole
Odd-Bjørn Lunde, Rogaland
Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Østfold
Varamedlem
1 Kari-Anne Bjørnø Karlsen styremedlem skoleåret 2017/2018
2 Geir Kristoffersen

Medlemskontingent 2015

450 kr for enkeltmedlem med Tangenten
200 kr for husstandsmedlemmer
300 kr for studenter/pensjonister med Tangenten
975 kr for skoler/institusjoner med Tangenten
Nytt: pensjonistmedlemskap med samme pris som heltidsstudenter. Send oss en epost om du ønker å endre medlemstype.

Organisasjonssekretær

Elin Unstad, org.sek@lamis.no

LAMIS oppfordrer alle til å arrangere Matematikkens dag i løpet av uke 11.

Matematikkdagheftet 2018 er kommet. Informasjon om tilgang ligger på vår hjemmeside.

Lederen har ordet

Renate Jensen

Kjære Lamiskollega!

Sentralstyret i Lamis ønsker dere godt nyttår. Vi ser frem til et spennende matematikkår der fagfornyelsen blir viktig. Kjerneelementene i de ulike fagene er nå klare, og skal ut på siste høring. I løpet av våren blir det mulighet til å anbefale personer til arbeidet med å skrive kompetansemål. Bruk muligheten til å påvirke!

Et Lamishøydepunkt i 2018 blir sommerkurset i Rojales, Spania som arrangeres den 25. og 26. juni. Lokallaget for norske skoler i utlandet arbeider sammen med sentralstyret med både det faglige og det sosiale programmet. Vi har fått tre flotte plenumsforelesere på plass. Disse kan du lese mer om i dette nummeret av Tangenten. Verkstedsholderne blir presentert etterhvert som de blir klare. Vi ønsker et fokus på utforskende og åpne oppgaver, som gir aktive barnehagebarn og elever som får mulighet til læresamtaler og til å reflektere om egen læring. Vi håper spesielt å få med flere fra barnehage og fra videregående skole, både som deltagere og bidragsytere. Følg med på vår hjemmeside, der vil påmelding, program og praktisk informasjon være på plass i løpet av februar.

En annen viktig begivenhet er semifinale og finale i UngeAbel som finner sted 10. – 12. april på Gardermoen. Runde 1 av UngeAbel er nå ferdig. Takk til alle de 172 elevgruppene som deltok. Vinnere av premiene etter denne runden er trukket. Premien på 2000 kr gikk til Sandfallet ungdomsskole i Finnmark. Overraskelsen gikk til Hovseter skole i Oslo. Gratulerer til vinnerne! Når begge de innledende rundene er klare, starter fylkesvinnerne sitt arbeid med fordypningsoppgaven. Årets oppgave går ut på å undersøke og stille spørsmål om summer av påfølgende heltall. Her får elevene arbeide med ulike strategier og fremgangsmåter. De får muligheten til å kommunisere både muntlig og skriftlig, og bruke sin kreativitet underveis i arbeidet og i valg av presentasjonsform. Fordypningsoppgaven inneholder både en faglig rapport, en utstilling og en presentasjon. Oppgaven og vurderingskriterier er tilgjengelig for alle på vår hjemmeside, og anbefales å ta i bruk for å gi elever muligheten til å gå i dybden og arbeide utforskende.

I dette nummeret av Tangenten kan dere lese et flott intervju med elevene som fikk pris for beste fordypningsoppgave i 2017. De forteller om samarbeid, innsats, mestring og motivasjon - og om følelsen av å være med på noe ekte og skikkelig.

Tilslutt vil jeg oppfordre alle til å ta i bruk årets Matematikkdagshefte og arrangere en matematikkdag i barnehage og skole. Vi håper mange lokallag vil lage en temakveld for å vise mulighetene et slikt hefte og en slik dag kan gi. Ta også gjerne kontakt med lokale aviser og få litt blest i ditt nærmiljø. Sammen klarer vi å formidle matematikkglede!

Lykke til med det gode læringsarbeidet!

Sommerkurs 2018

Plenumsforeleserne til sommerkurset i Spania er klare.

Relationellt lärarskap, om att møta skillnad och unika barn i matematikundervisningen.

Ann-Louise Ljungblad er universitetslektor ved Institutionen för pedagogik och specialpedagogik, Gøteborg Universitet.

Mina forskningsintressen är i huvudsak inriktade mot inklusion och matematik i praktiknära klassrumsforskning. Jag presenterar detaljerade beskrivningar över hur lärare relaterar till elever i nuet inom såväl grundskolan, gymnasiesärskolans individuella program som gymnasieskolan. Resultatet visar på respektfulla och tillitsfulla lärare-elevrelationer som ett möjligt relationellt alternativ.

Barn som strever i matematikk – hva kan vi gjøre?

Anita Lopez-Pedersen er stipendiat ved Institutt for spesialpedagogikk, Universitetet i Oslo. Hun arbeider spesielt med feltene:

- Matematikkvansker
- Utvikling av matematiske ferdigheter
- Språk og språkutvikling
- Spesialundervisning og tilpasset opplæring

Hvordan undervise i matematikk i et teknologitett klasserom?

Frode Sømme er rektor på Jong skole i Bærum. Det er en barneskole med 420 elever, beliggende i Sandvika. Skolen tok i bruk iPad som hovedverktøy for sin undervisning i 2014. Dette gjennomsyrer all undervisning på skolen. Alle elevene har hver sin iPad. De har gjort seg mange erfaringer med å bruke digitale verktøy i sin undervisning.

Sømme vil vise et utvalg eksempler på hvordan dette kan være med på å styrke undervisningen i matematikk, og legge til rette for at flere elever får et større faglig utbytte av undervisningen. Jong skole ble tildelt innovasjonsprisen i 2016 fra Senter for IKT i Undervisningen for sitt helhetlige arbeid med IKT.

Nytt varamedlem til styret: Geir Kristoffersen

Jeg kommer fra Lurøy kommune på Helgelandskysten. Det er et fantastisk sted å vokse opp, men allerede fra 8. klassetrinn måtte jeg flytte til Nesna på internat/hybel. Etter erfaring fra mekanisk verksted, fiske og læreryrket, begynte jeg i 1979 på lærerutdanninga i Alta. Her har jeg bodd siden den gang, etter hvert med samboer, to barn og straks to barnebarn.

I tillegg til vanlig familie- og arbeidsliv, har jeg alltid vært godt over middels interessert i idrett og friluftsliv. På idrettssida er det mest langdistanse – løping, ski, sykling og kajakk. Det fine er at alt dette lett kan kombineres med friluftsliv. Et høydepunkt i så måte var «Norge på langs» på ski i 2005. I tillegg er jeg glad i jakt og fiske, men da kombinert med den gode gamle matauke-tradisjonen vi har i Norge. Jeg kjenner at gamle fordommer lett popper opp når jeg hører om «Catch & release».

Rett etter lærerutdanninga, tok jeg Idrett grunnfag, og som lærer i Finnmark var jeg så heldig å få et års betalt videreutdanning. Jeg tok da matematikk og fysikk ved UiT. Senere har jeg tatt litt mer matematikk og matematikkdidaktikk.

Jeg begynte som lærer i 1983, og har jobbet 8 år på mellomtrinnet og 16 år i ungdomsskolen, de 21 siste som kontaktlærer. I 2005 ble jeg, parallelt med læreryrket, ressursperson for Matematikksenteret. Årene som ressursperson har betydd mye for meg som matematikklærer, kanskje mer enn all annen høyere matematikkutdanning jeg har tatt.

I 2007 ble jeg engasjert som prosjektleder for et «Fra ord til handling»-prosjekt, og i tillegg fikk jeg ansvar for å etablere newtonrom og FIRST LEGO League-turnering (FLL) i Alta kommune. Dette er etter hvert blitt godt innarbeidet. Jeg har fremdeles ansvar for Newton og FLL og er i tillegg realfagskoordinator og kommunal regneveileder for grunnskoler og barnehager i kommunen.

Jeg har vært medlem av Lamis siden 2006, og varamedlem i sentralstyret fra august 2017.

I matematikkundervisningen er jeg opptatt av å:

- Gi elevene faglige utfordringer som engasjerer dem
- Oppfølginga etter kartlegging
- Utvide gammel kunnskap og fokusere på sammenhengen mellom ulike deler av matematikken - dybdelæring også innen matematikkfaget
- Den matematiske samtalen
- Læringskulturen

Det blir stadig mer klart for meg at dette er nødvendig, men ikke tilstrekkelig for å oppnå god læring. Uten en god læringskultur, blir uansett resultatet sterkt begrenset, og den gode læringskulturen må alltid behandles som ferskvare.

Realfagstur til Edinburgh

Anne Bruvold, Gunnar Lødding, Mette Kristin Alstad Østvik og Monica Volden

Bilde 1: Edinburgh Castle

Styret til LAMIS Tromsø hadde gleden av å få utarbeide Matematikkdagsheftet for 2017, og vi bestemte oss tidlig for at vi skulle bruke pengene til å reise for. Valget falt på Edinburgh i Skottland, og turen ble en langhelg første helga i august.

Fredagen gikk for det meste til reising og etablering i en leilighet i Canon Cort, like i nærheten av Edinburgh Botanic Garden. Første dag med aktiviteter var lørdagen hvor vi besøkte Camera Obscura & World of Illusions. Her var det en rekke optiske illusjoner i tillegg til aktiviteter som strakte seg fra tesselering til maling av symmetriske bilder med en digitalkanon. Her var det ideer som både kunne tas med til elever, studenter og Vitensenter, og man kunne få hodet til andre servert på et fat.

Søndag tok vi buss til Glasgow og tilbrakte dagen på Glasgow Science Centre, vitensenteret i Glasgow, hvor de i tillegg til interaktive utstillinger i tre etasjer, har både IMAX kino og planetarium. Utstillinga har flere temaer og de har en rekke matematikkrelaterte installasjoner og optiske illusjoner. Som i alle gode vitensentre er en dag her for lite.

Mandag begynte på et escape rom, Can You Escape, hvor vi måtte utføre en rekke oppgaver for å reparere redningskapselen

Bilde 2: Gunnar sitt hode på et fat i Camera Obscura & World of Illusions

Bilde 3: Anne lurer på hvordan hun skal komme seg ut av Speillabyrinten i Camera Obscura & World of Illusions

Bilde 4: Klassisk optisk illusjon som normalt er i 2D men her er bygget i 3D. Må ses fra rett vinkel, Glasgow Science Centre

Bilde 5: Glasgow Science Centre

til en romstasjon. Oppgavene ledet fram til tallkoder og krevde logisk tenking og litt matematikk, så vår erfaring fra løsning av matematikknøtter kom godt med. En ekstra utfordring var at kommunikasjonen med bakkebasen var på engelsk og operatøren hadde sterk skotsk aksent. Det var en tidsfrist pga begrenset energi og oksygentilgang og som vanlig når man er fokusert på oppgaveløsning går tida fort. Vi var ennå innenfor tiden da vi begynte å slå inn den siste koden, men gikk tom for tid før siste sifferet var tastet. Tilbakemeldingen fra operatøren var at vi var midt på treet – noe vi justerte opp til over gjennomsnittet ut fra språkvansker og uvante måleenheter.

Tirsdag gikk turen tilbake til Tromsø, med hodene fulle av inntrykk og ideer og damene i følget hadde koffertene fulle av garn. Og, «alle var enige om at det hadde vært en fin tur».

En matematikknøtt fra Glasgow vitensenter

Du har 5 like rektangulære brikker, hvor forholdet mellom kantene er 2:1, for eksempel dominobrikker.

Du har fem rektangulære felt, hvor forholdet mellom kantene er 2:1, 2:2, 2:3, 2:4 og 2:5.

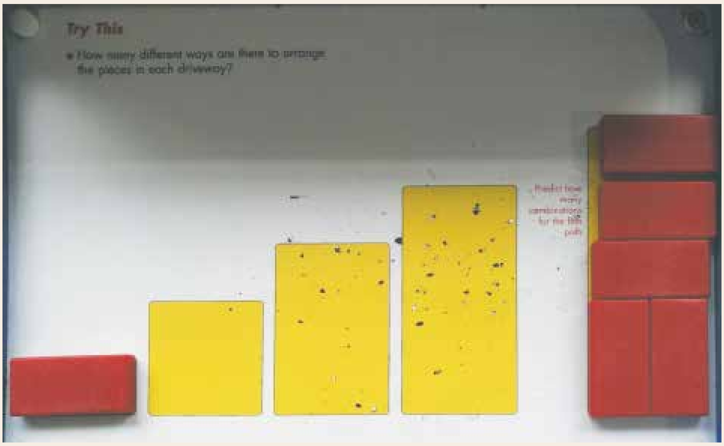
På hvor mange forskjellige måter kan du legge brikker for å dekke de fire minste områdene (1–4)? Bruk brikkene til hjelp.

Kan du finne antall kombinasjoner for det femte feltet uten å bruke brikkene?

Eksempel:

Første felt: én mulighet, én brikke vannrett.

Andre felt: to kombinasjoner, to brikker vannrett eller to brikker loddrett.



Intervju med vinnerne av UngeAbel 2017

Kari-Anne Bjørnes

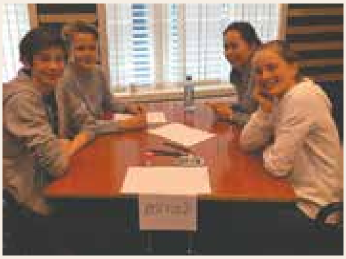
Vinnerne av fordypningsoppgaven i konkurransen Unge Abel 2017 var klasse 9B ved Gressvik Ungdomsskole. Klassen ble fylkesvinnere fra Østfold, og klassen valgte å sende Audun Moksnes, Thea Graff Nyland, Ele Tokle og Ingrid Gustavsen til Gardermoen for å representere klassen i semifinalen av konkurransen. I dette intervjuet skal dere få høre litt om erfaringene representantene gjorde seg gjennom deltagelsen i UngeAbel.

Hva var bra med å være med på UngeAbel?

Det var veldig gøy å arbeide med andre typer oppgaver i klassen. Dette var litt annerledes enn den matematikken vi ser til daglig. Det ble liksom ekstra morsomt når vi skulle konkurrere! Det var også morsomt at dette var noe vi gjorde i fellesskap som klasse.

Fortell litt om de innledende rundene dere gjennomførte sammen med klassen:

Dette var veldig spennende og morsomme oppgaver. De krevde at vi måtte tenke, og vi måtte også klare oss selv siden læreren vår ikke hjalp oss underveis. Mattetimene hvor vi gjennomførte både runde 1 og runde 2 ble veldig bra, og det skapte veldig engasjement i elevgruppa. Det var veldig lærerikt!



Fortell litt om hvordan det var i semifinalen på Gardermoen:

Konkurransen er jo ganske stor siden hele landet har representanter i konkurransen. Det var en spennende opplevelse, og det ble ekstra spennende siden tiden vi hadde til rådighet ble talt ned på storskjerm! Det ga oss nok litt ekstra press, og vi ble stresset av å se klokka hele tiden.

Det var også veldig gøy at vi traff mange andre elever fra hele landet. Vi er jo glade i matematikk, og det var fint å få bruke tre dager på faget. I tillegg til at vi brukte mye tid på faglige oppgaver var det også veldig sosialt! Vi ble kjent med flere av de andre deltakerne, og vi har faktisk litt kontakt på Snapchat enda! Det var ekstra morsomt å snakke med deltakerne fra Finnmark som bor i helt i den andre enden av landet vårt! Det var også morsomt å høre alle de ulike dialektene fra hele landet!

Hvordan var det å møte andre elever som er veldig flinke i matematikk?

Det var morsomt. Vi kunne snakke matematikk på et helt annet nivå! Det var også litt rart siden vi er vant til å være veldig gode hjemme på skolen, mens her var vi liksom sammen med bare flinke! Vi ble plutselig lik alle de andre!

Hva synes dere om selve oppgavene til semifinalen?

Oppgavene var som de burde være. Det var vanskelige, men det bør de være i en slik konkurranse. Vi følte at oppgavene til finalen var lettere enn oppgavene til semifinalen. Vi satt i salen og løste flere av finaleoppgavene, men oppgavene til semifinalen synes vi var mer krevende. Det er mulig stresset og presset med konkurranse, nedtelling og alvoret som lå i rommet var med på å gjøre oss litt ekstra nervøse.

Hva tenker dere om at dere vant premien for beste fordypningsoppgave?

Det var veldig gøy å vinne! Vi ble sykt skuffet over å se at vi ikke nådde opp i selve konkurransen. På en annen side var det veldig mange flinke elever med, og vinnerne fra Oslo vant jo konkurransen i Danmark! Det var jo de lagene som skilte seg ut som kom til finalen. Laget fra Oslo fikk

låne vår prosjektrapport slik at de kunne forbedre sin før deltagelsen i Danmark. Vi må jo hjelpe hverandre slik at vi gjør det best mulig internasjonalt!

Det som var fint med å vinne premien for beste fordypningsoppgave var at dette var hele klassens arbeid. Vi vant ikke på grunn av prestasjonene til oss fire som representerte klassen, men vi vant fordi klassen hadde gjort en god jobb sammen i forkant av semifinalen. Det var veldig gøy at hele klassen var med underveis, og klassen fortjente å vinne da de har jobbet veldig bra med oppgaven. Det var ekstra gøy å fortelle de andre at det var 9B som vant!

Det var stas, det var et skikkelig opplegg og det er veldig bra at konkurransen er på et hotell og ikke bare hadde vært på en skole. Nå fikk vi følelsen av å være med på noe ekte og skikkelig!

Var det noe som ikke var bra med å delta på UngeAbel?

Vi ble litt skuffet over å få fisk til middag. Det var liksom ikke det vi hadde håpet på når vi skulle få mat på hotell! Dessuten fikk vi litt lite mat. Et av lagene valgte faktisk å reise på McDonalds etter middag for å få seg litt ekstra å spise! Men kake til lunsj og god frokost veier jo opp for dette!

Hva vil dere si til de skolene som vurderer å bli med på UngeAbel?

Det er ingen grunn til å tenke! Meld dere på og sett i gang! Dette var en veldig fin konkurranse å være med på! Kjempemorsomt med klassefellesskapet, og utrolig gøy å få være med til Gardermoen! Her er det ingen minus, bare masse gøy og moro!

Glitter og glam

Lokallagsmøte på Sunnmøre med Else Devold

Henrik Kirkegaard

I slutten av november hadde vi den glede og fornøyelse å invitere til medlemsmøte i lokallaget igjen. Denne gangen var det Aspøy skole i Ålesund som hadde stilt lokale og sin kaffekoking til rådighet.

Else kommer opprinnelig fra Ålesund, og hun er ikke vanskelig å be når hun både kan besøke familie og samtidig få lov å snakke om begynneropplæring og matematikkmestring. Ytterligere kan hun en hel kveld få lov å snakke som en syngende sunnmøring – kan det bli bedre.

Vi møtte tallsterkt opp. Litt over 60 deltakere fra barnehager og barneskoler hadde tatt turen denne kvelden. Else er en glimrende foreleser. Hun vet hva hun vil med undervisningen sin, og hun fremfører det på en medrivende måte. Her får du ikke lov å sitte stille og lytte lenge om gangen. Du må gjøre en masse aktiviteter med de andre deltakerne. Innimellom var det også sang med diverse fakter.

Else er nemlig en slik lærer, at hun vet akkurat hva som fanger elevene sin interesse. Kall det gjerne glitter og glam; men det funker. Her er ingen kjedelige trepinner eller kjønnsløse plastikkdingser. Niksen – her er det steiner med utallige former for glitter, og små magiske juveler i all verdens fraiche farger. Ikke bare elevene har lyst å lære telling og tallforståelse med disse glitrende konkretene, vi tilhørere syns også det var stas å få lov å holde på med dette. I tillegg lærte Else oss om aktiviteter omkring plassverdiforståelsen. Her ble pinkfargete glitrende juveler byttet ut med sugerør i mange farger. Aktivitetene besto av spill og konkurranse i skjønn blanding.

Vi ble trollbundet i to og en halv time, alle som en. Else vet hvor skoen trykker. Hun hadde spesielt fokus på tospråklige elever og deres ofte manglende begrepsforståelse. Dette nyter «vanlige» norske elever også godt av. Det er heller ikke alle i denne gruppen som har begrepsforståelsen helt på plass.

Etter taktfast bifall til kursholderen kunne vi konstatere at vi hadde hatt en vellykket kveld. Deltakerne fikk masse praktiske tips til matematikkaktiviteter de kunne praktiseres uten særlig store forberedelser. Noen av lærerne fra skolen min var i gang allerede den neste dagen med et par av aktivitetene de hadde lært kvelden før, la jeg merke til. Ikke verst.

Tusen takk til alle fremmøtte, tusen takk til Aspøy skole og tusen takk til Else. Vi sees på neste medlemsmøte.

Litt om matematikk i videregående skole

Odd-Bjørn Lunde

Jeg vil påstå at videregående skole i stor grad blir styrt av hvordan lærebøker vektlegger emner og oppgavetypene som brukes i sentralgitt skriftlig eksamen. Det har vært mye fokus på bruk av digitale verktøy de siste årene. Først uten at oppgavetypene endret seg og gjorde oppgavene for enkle med hjelpemidler, til etter hvert å bli mer krevende slik matematikken må forstås godt i tillegg til at verktøyene må beherskes. Denne utviklingen har gjort at mange, kanskje for mange av eksamensoppgavene med hjelpemidler ikke passer for elever med lav til middels måloppnåelse i fagene.

Verktøy og metoder

De digitale verktøyene vi bruker nå er regneark, graftegner og CAS. Alle disse verktøyene finnes i GeoGebra, men når det gjelder regneark er Excel å foretrekke. Lærerne behersker jevnt over verktøyene godt, men elevene bruker mye tid på å beherske dem. Noen vil si på bekostning av matematisk forståelse, men med forståelse gjør verktøyene at elevene kan få til mye mer enn uten dem.

Bilde 1: Bildet viser elever som jobber i Excel regneark med økonomioppgaver i matematikk 1P.

Selv jobber jeg med å utvikle og finne flere utforskende undervisningsopplegg, og jeg kommer til å ta i bruk mer konkretiseringsutstyr enn det jeg gjør nå fremover. De siste årene har jeg i større grad enn tidligere forsøkt å få elevene til å vektlegge hva de skal og må kunne fremfor hva og hvor mye de må gjøre. Jeg liker digitale verktøy og nye undervisningsmetoder, men er fortsatt glad i den grønne tavlen og lærebøker.

Det å holde på det trygge og kjente er nok noe som kjennetegner de fleste lærere i videregående skole, men med nok tid

Bilde 2

endres ting sakte men sikkert. Man kan da stille seg spørsmål om skolen utvikler seg så sakte at kunnskapen den formidler blir fjernere og fjernere fra samfunnets kunnskapsbehov? Mye kunnskap som før var vanskelig tilgjengelig er nå tilgjengelig med ett lite klikk.

Prøveformer

I matematikk er fortsatt de fleste prøver individuelle og skriftlige. Enten helt uten hjelpemidler, bare med hjelpemidler eller todelt med og uten hjelpemidler. Jeg har sammen med noen kolleger gjennomført samarbeidsprøver i par i noen fag. Lærer delte da elevene inn i passende par primært i forhold til prestasjoner fra tidligere individuelle vurderinger i faget. Dette har vært bra, elevene har likt det og vi lærere ønsker å gjennomføre slike prøver også i andre termin dette skoleåret. Det har gitt elevene mulighet til å lære av hverandre også i prøvesituasjoner og elevene hevder selv at de hadde «lavere skuldre» når de hadde slike prøver enn når de hadde individuelle prøver. Jeg har også tenkt å la elevene samtale i par noen minutter om oppgavene før de løser dem i noen individuelle prøver.

Litt til slutt

Det som kanskje er litt rart er at vi fortsatt jobber så mye med penn og papir når resten av samfunnet har blitt mer og mer digitalt. Men så lenge eksamen er todelt som nå, kommer det vel til å fortsette slik. Ellers ser jeg frem til at nye læreplaner skal komme og håper at det ikke blir like mange matematikkfag som nå (1P-Y, 1T-Y, 2P-Y, 1P, 1T, 2P, S1, S2, R1, R2 og X) og at læreplanene får en mer naturlig progresjon, spesielt gjennom programfagene og i forhold til tilpasningen til yrkesfagene.